Lezione 4 - 29/9/2025

Numeri naturali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sono i numeri "che servono per contare"

sappiamo che su $\mathbb{N}$ sono definite 2 operazioni e una rel. d'ordine totale

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n,m) \mapsto n+m$$
addizione (o somma)

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n,m) \mapsto n \cdot m$$
moltiplicazione (o prodotto)

- associativa $\begin{cases} n+(m+k) = (n+m)+k \\ n\cdot(m\cdot k) = (n\cdot m)\cdot k \end{cases}$
- $\exists$ neutro $\begin{cases} 0 \in \mathbb{N} \ \forall n,\ 0+n = n+0 = n \\ 1 \in \mathbb{N}\ (1 \neq 0)\ \forall n \quad 1\cdot n = n \cdot 1 = n \end{cases}$
- commutativa $n+m = m+n$, $n \cdot m = m \cdot n$
- distributiva $n\cdot(m+k) = n\cdot m + n \cdot k$

- è definita $\geq$ (relazione d'ordine totale)

$\geq$ è compatibile con le operazioni cioè

$\forall n,m,k \quad n \geq m \Rightarrow n+k \geq m+k$
$\qquad\qquad\ \ n \geq m \Rightarrow n\cdot k \geq m \cdot k$ ⊛

$(\mathbb{N}, +, \cdot, \geq)$ ⊛ $k \geq 0$

Problema: esiste una "proprietà di base" su $\mathbb{N}$ in modo tale che tutte le proprietà di $\mathbb{N}$ rel. a $+, \cdot, \geq$ si possono dedurre?

SI: con gli ASSIOMI DI PEANO

ASSIOMI DI PEANO

Esiste una terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ tale che

- $\mathbb{N}$ è un insieme (dei numeri naturali)
- 0 è un elemento di $\mathbb{N}$ ($0 \in \mathbb{N}$)
- $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{N}$

tali che

1) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva (la chiamo funzione "successivo")

2) $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$ (0 non è successivo

3) (Principio di induzione)
Supponiamo che $S \subseteq \mathbb{N}$.
Supponiamo che i) $0 \in S$
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in S \Rightarrow \sigma(n) \in S$

Allora $S = \mathbb{N}$

- dagli assiomi di Peano si possono dedurre (come teoremi) tutte le proprietà di $\mathbb{N}$

Oss. ¿ chi è la funzione successivo?

chiamo 1 il successivo di 0

a questo punto $\sigma(n) = n+1$

come diventa il principio di induzione?

Principio di induzione

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$.

se $0 \in S \wedge (\forall n \in S,\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S)$

allora $S = \mathbb{N}$.

A cosa serve?

primo utilizzo. Voglio provare che una certa proprietà $P(n)$ vale per ogni n

es. mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+2\dots+n = A$$
$$n+(n-1)+(n-2)\dots+0 = A$$
$$\underbrace{n+n+n\quad+n}_{\text{quanti sono? } n+1} = 2A$$

$2A = n(n+1)$

$\boxed{A = \frac{n(n+1)}{2}}$

ES. provare che vale

$$0+1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ES. provare che per ogni n vale

$$(4-1)+(16-9)+\dots+((2n)^2-(2n-1)^2) \overset{?}{=} n(n+1)+1$$

Proviamo a risolverli usando il principio di induzione

Per provare che $P(n)$ è vera per ogni n basta provare

i) $P(0)$ è vera

ii) se è vera $P(n)$ allora è vera $P(n+1)$ $\forall n$.

voglio provare che

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

basta provare ¿ $P(0)$ è vera? sì

$0 \overset{?}{=} \frac{0\cdot 1}{2}$

$0=0$ sì

ii) ¿ è vero che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

scrivo $P(n)$

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

devo cercare di ottenere $P(n+1)$ facendo tutte cose permesse e valide

$$P(n) \Rightarrow 0+1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$\Downarrow$$

$$0+1+\dots+n+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0+1+\dots+n+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$0+1+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad : \quad P(n+1)$$

OK

ES. Sia $a > -1$

provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

disuguaglianza di BERNOULLI

soluzione

$P(n)$ è " $(1+a)^n \geq 1+na$ ".

uso l'induzione e quindi basta verificare

¿ $P(0)$ è vera ?

¿ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera ?

¿ $P(0)$ è vera ? $\qquad (1+a)^0 \overset{?}{\geq} 1+0\cdot a$

Sì $\qquad 1 \overset{?}{\geq} 1 \qquad$ sì

¿ $\forall n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$1+a>0$

$$P(n): \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

$\Downarrow$ ← moltiplico per $(1+a)$ da tutte e 2 le parti

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$\Downarrow$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1+a)^{n+1} \geq \underbrace{1+(n+1)a+\underbrace{na^2}_{\geq 0}}_{\geq 1+(n+1)a}$$

$$\Downarrow$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad : \quad P(n+1)$$

OK

ES. Sia $a \neq 1$

Provare che, per ogni n, vale

$$1+a+a^2+a^3+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

(ridotta della serie geometrica)

Lo provo con l'induzione

i) è $P(0)$ vera?

ii) è $\forall n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

i) è $P(0)$ è vera? $\quad 1 \overset{?}{=} \frac{1-a}{1-a} = 1 \quad$ sì

ii) è $\forall n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$$P(n): \quad 1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$\Downarrow$ sommo da entrambe le parti a^{n+1}

$$1+a+a^2+\dots+a^n+a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$1+a+\dots+a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-(a^{n+1})a}{1-a}$$

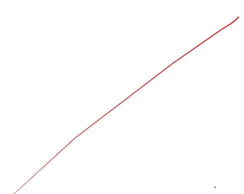
$$\Downarrow$$

$$1+a+\dots+a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a} \quad : \quad P(n+1) \quad \text{OK.}$$

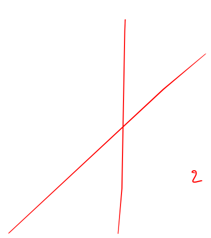
$$\boxed{a^{n+1}\cdot a = a^{n+2}}$$

ES. Provare che se si disegnano sul piano n rette allora restano individuate al più

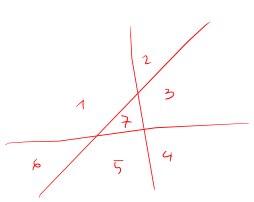
$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$ regioni separate tra loro da segmenti o semirette o rette



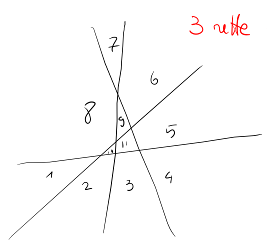
1 retta – 2 regioni



2 rette – 4 regioni



3 rette – 7 regioni



4 rette – 11 regioni

n	$\frac{n(n+1)}{2}+1$
1	2
2	4
3	7
4	11

posso verificare la formula per induzione

¿ $P(0)$ è vera ? ← allora verifico $P(1)$

¿ se $P(n)$ allora $P(n+1)$?

e provo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ a partire da 1

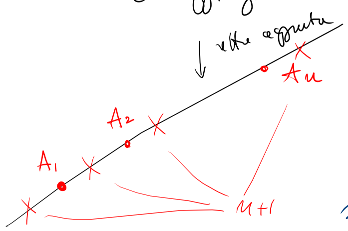
$P(0)$ è vera ? ← qui c'è un problema su 0 però l'induzione vale anche se parto da $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e verifico che $P(n)$ vale $\forall n \geq n_0$

Supponiamo che valga $P(n)$

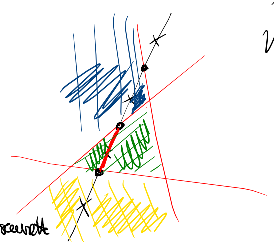
cerchiamo di vedere che vale $P(n+1)$

$P(n)$: quindi prendo n rette e ho $\frac{n(n+1)}{2}+1$ regioni

ho n rette aggiungo una retta: cosa succede



restano individuati n punti dalle rette precedenti



restano individuati sulla retta aggiunta $n+1$ segmenti o semirette

aggiungendo una retta ottengo $n+1$ nuove regioni

quindi $\frac{n(n+1)}{2}+1+(n+1)$ è il numero delle regioni con $n+1$ rette

vecchie · nuove

$$\frac{n(n+1)}{2}+1+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$$

$P(n+1)$!

50 rette $\quad \frac{50(51)}{2}+1 = 1276$!

oltre alle dimostrazioni per induzione il principio di induzione serve anche a definire oggetti

def. una funzione con dominio $\mathbb{N}$, la chiamo e codominio A

SUCCESSIONE a valori in A

$$\mathbb{N} \longrightarrow A \qquad n \longmapsto a_n$$

la indico con $(a_n)_n$

def. sia $(a_n)_n$ una successione di numeri (reali) definiamo $\displaystyle\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n}$

e se non uso i puntini?

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \begin{cases} a_0 & \text{se } n = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i \end{cases}$$

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$$

¿ quanto vale

$n!$?

$\boxed{0! = 1,}$ per convenzione

$1! = 1$

$(n+1)! = (n!)(n+1)$

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$