

Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Ing. Industriale e CdL Ing. Navale

a.a. 2025/2026

1 Serie numeriche

1.1 Definizione e prime proprietà.

Il concetto di **serie** formalizza un procedimento per sommare un'infinità numerabile di termini. Vediamo qualche esempio:

1. Sommiamo le potenze di 2:

1
1 + 2
1 + 2 + 4
1 + 2 + 4 + 8
1 + 2 + 4 + 8 + 16
...

Più andiamo avanti più la somma diventa grande; se consideriamo l'insieme dei numeri ottenuti così, cioè in maniera ricorsiva, sommando al risultato del passo n la successiva potenza di due, ci accorgiamo che esso è illimitato superiormente e possiamo dunque dire che la somma delle potenze di 2 è uguale a $+\infty$.

2. Sommiamo ora le potenze di $\frac{1}{2}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Osserviamo che se chiamiamo S questa somma allora

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = S - 1.$$

Da $\frac{1}{2}S = S - 1$ segue $S = 2$.

Lo stesso procedimento applicato in maniera acritica al primo caso porterebbe a:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ quindi $2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1$ e da $2S = S - 1$ segue $S = -1$ il che è ovviamente assurdo. L'assurdo chiaramente deriva dal aver supposto S un numero reale.

Definizione 1 Sia $(a_n)_n$ una successione. Definiamo una successione $(S_n)_n$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_0 + a_1 \\ S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ S_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\dots \end{aligned}$$

ossia

$$S_0 = a_0 \quad \text{e} \quad S_n = S_{n-1} + a_n \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

La coppia di successioni $((a_n)_n, (S_n)_n)$ si dice **serie** di termine generico a_n e si indica col simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad \sum_n a_n.$$

L'elemento $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ si dice **somma parziale** o **ridotta n -esima**.

Se esiste il limite di S_n in $\mathbb{R}$ diciamo che la serie **converge**. Il limite $S = \lim_n S_n$ viene chiamato **somma della serie** e si scrive:

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Se $\lim_n S_n = +\infty$ si dice che la serie **diverge positivamente** e si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$,

se $\lim_n S_n = -\infty$ si dice che la serie **diverge negativamente** e si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$, mentre si dice che la serie è **indeterminata** se il limite di S_n non esiste.

Osservazione: Se il termine generale a_k risulta ben definito solo per $k \geq k_0$ anche S_n sarà definito a partire da k_0 : $S_n = \sum_{k=k_0}^n a_k$.

Esempi banali: 1. Se $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $S = \lim_n S_n = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$.

2. Se $a_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $S = \lim_n S_n = +\infty$: $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty$, la serie diverge positivamente.

3. Se $a_k = (-1)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 1$ se n è pari, mentre $S_n = 0$ se n è dispari, quindi S_n non ha limite, cioè la serie $\sum_n (-1)^n$ è indeterminata.

Serie telescopiche

1. $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, $n \geq 1$. Vogliamo calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

Osserviamo che $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e usiamo questa formula per calcolare le somme parziali:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

e a questo punto l'idea è che l'uguaglianza $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ potrebbe essere vera. Si verifica per induzione che effettivamente $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \geq 1$ e si conclude che

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, \text{ cioè } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1.$$

2. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log(1 + \frac{2}{n})}_{a_n}$.

Osserviamo che usando le proprietà del logaritmo possiamo scrivere

$$a_n = \log(1 + \frac{2}{n}) = \log(\frac{n+2}{n}) = \log(n+2) - \log n.$$

Allora:

$$S_1 = a_1 = \log 3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \log 3 + \log 4 - \log 2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \log 3 + \log 4 - \log 2 + \log 5 - \log 3 = \log 4 + \log 5 - \log 2$$

e a questo punto proviamo con $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$.

Verifichiamo questa formula per induzione:

passo base: già fatto sopra

passo induttivo: ipotesi del passo induttivo $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$

tesi del passo induttivo $S_{n+1} = \log(n+2) + \log(n+3) - \log 2$.

Dimostrazione del passo induttivo:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \stackrel{\text{ipotesi}}{=} \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2 + \log(n+3) - \log(n+1)$$

$$= \log(n+2) + \log(n+3) - \log 2.$$

Conclusione: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha che $S_n = \log(n+1) + \log(n+2) - \log 2$.

Allora $S = \lim_n S_n = \lim_n (\log(n+1) + \log(n+2) - \log 2) = +\infty$, cioè $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{2}{n}) = +\infty$.

Esercizio: Trovare la somma delle seguenti serie:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

Serie geometriche: sono del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro ($= 1 + a + a^2 + \dots$).

Se $a = 1$ allora $S_n = n$ e la serie diverge positivamente;

se $a \neq 1$ allora $S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$

otteniamo:

caso $a > 1$: $S = \lim_n S_n = +\infty$, dunque la serie diverge positivamente

caso $-1 < a < 1$: $S = \lim_n S_n = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$, dunque la serie converge a $\frac{1}{1-a}$

caso $a = -1$: è il caso visto prima, la serie è indeterminata

caso $a < -1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = +\infty$ mentre $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = -\infty$, la serie è indeterminata.

1.2 Convergenza

In generale non si riesce a calcolare la somma di una serie, ci limitiamo a stabilire se la serie converge o meno. Per determinare il carattere di una serie (convergente/divergente/indeterminato) abbiamo a disposizione i seguenti **strumenti**:

- teoremi algebrici
- la condizione necessaria

- l'elenco di serie il cui comportamento è noto
- diversi criteri di convergenza: due casi

serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$)

serie a termini di segno variabile

- criterio della radice
- criterio del rapporto
- criterio del confronto
- **criterio del confronto asintotico**
- ...
- criterio di Leibniz
- criterio di convergenza assoluta

Teoremi algebrici: seguono dal fatto di essere una sommatoria

1. Sia $(a_n)_n$ una successione e sia λ un numero reale diverso da zero. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (\text{in } \overline{\mathbb{R}}).$$

2. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad (\text{con tutte le eccezioni viste in } \overline{\mathbb{R}}).$$

Dimostrazione. 1. Basta ricordare che $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$.

2. Sia $c_n = a_n + b_n$. Poniamo $S_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n$, $S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, e $S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$. Allora $S_n^c = S_n^a + S_n^b$ e quindi $\lim_n S_n^c = \lim_n S_n^a + \lim_n S_n^b$ in tutti i casi in cui vale il teorema sul limite della somma.

Attenzione: non è vero che $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Teorema 1 (Condizione necessaria) Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ esiste ed è un numero reale. Allora

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0.$$

Come si usa questo risultato:

Se a_n NON CONVERGE A 0 allora la serie $\sum_n a_n$ NON CONVERGE.

Se a_n CONVERGE A 0 allora la serie $\sum_n a_n$ POTREBBE CONVERGERE, ma non sappiamo ancora se converge o no.

Esempio. Entrambe le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hanno la proprietà che il loro termine generale converge a zero, ma vedremo che la prima serie diverge mentre la seconda converge.

Serie note: Sono sostanzialmente soltanto le seguenti:

1. serie telescopiche
2. serie geometriche
3. serie armoniche generalizzate

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1. \end{array}$$

(la serie armonica classica è $\sum_n \frac{1}{n}$) e loro varianti come:

$$\sum_n \frac{1}{n \log^\alpha n} \quad \begin{array}{ll} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1. \end{array}$$

Vedremo più avanti una dimostrazione.

1.2.1 Serie a termini di segno costante

È sufficiente considerare le serie a termini positivi (altrimenti $-a_n \geq 0$)

Osservazione: sommando sempre numeri maggiori o uguali a zero, la successione S_n delle somme parziali è **crescente** quindi **ha limite** e questo limite può essere

- un numero reale positivo, e in questo caso la serie converge,
- oppure $+\infty$, e in questo caso la serie diverge positivamente.

Diciamo che una proprietà è vera **definitivamente** se è vera per tutti gli n maggiori di un certo n_0 . Se ad una serie cambiamo un numero finito di termini, il comportamento della serie non cambia, cambia eventualmente la somma nel caso delle serie convergenti. Quindi è sufficiente che la successione a_n abbia definitivamente i termini di segno costante.

Definizione 2 Diremo che due serie hanno lo stesso carattere/comportamento se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti a $+\infty$ o a $-\infty$, o entrambe indeterminate.

Criteri di convergenza per serie a termini POSITIVI

Teorema 2 (criterio della radice)

Sia $a_n \geq 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

- se $\ell > 1$ allora la serie diverge (non verifica nemmeno la condizione necessaria)
- se $\ell < 1$ allora la serie converge.

Osservazione Se $\ell = 1$, non possiamo decidere se la serie converge o meno usando questo criterio.

Teorema 3 (criterio del rapporto)

Sia $a_n > 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

- se $\ell > 1$ allora la serie diverge (non verifica nemmeno la condizione necessaria)
- se $\ell < 1$ allora la serie converge.

Osservazione Se $\ell = 1$, non possiamo decidere se la serie converge o meno usando questo criterio.

Teorema 4 (criterio del confronto)

Supponiamo che $a_n \geq b_n \geq 0$ (definitivamente). Allora valgono le seguenti due implicazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} &\implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge.} \end{aligned}$$

Teorema 5 (criterio del confronto asintotico)

Supponiamo che $a_n \geq 0$ (definitivamente), $b_n > 0$ (definitivamente) e che

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[.$$

Allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè una converge se e solo se converge l'altra.

Come si usa: dobbiamo studiare $\sum_n a_n$, cerchiamo una serie nota $\sum_n b_n$ in modo tale che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \ell$ con $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$; se la troviamo, allora la serie iniziale si comporta come la serie $\sum_n b_n$.

Vediamo ora cosa si riesce a dire se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ o se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$.

- se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ allora (definitivamente) $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$ e possiamo usare il criterio del confronto;
- se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora (definitivamente) $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ e anche in questo caso possiamo usare il criterio del confronto.

Esempi di applicazione dei criteri di convergenza

$$1. \sum_n \underbrace{\frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + 2}}_{a_n}.$$

Osserviamo che $a_n > 1$ quindi non è soddisfatta la condizione necessaria. Si ha $\sum_n \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + 2} = +\infty$.

$$2. \sum_n \underbrace{\frac{n^3 + 5}{2^n}}_{a_n}.$$

Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \rightarrow 0$ quindi la serie POTREBBE convergere. Proviamo a usare il criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{n^3 + 5} \rightarrow \frac{1}{2}$ perchè $\sqrt[n]{n^3 + 5} \rightarrow 1$ (radice n -esima di polinomio). Siccome $\frac{1}{2} < 1$ la serie data converge.

Con il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3 + 5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3 + 5} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^3 + 5}{n^3 + 5} \rightarrow \frac{1}{2}$. Come sopra, essendo $\frac{1}{2} < 1$ concludiamo che la serie data converge.

$$3. \sum_n \underbrace{\frac{n^2 + 3n + 5}{7n^3 + 1}}_{a_n}.$$

Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \rightarrow 0$ quindi la serie POTREBBE convergere. I criteri della radice e del rapporto non funzionano perchè il limite è uguale a 1.

Informale: $a_n \approx \frac{n^2}{7n^3} = \frac{1}{7n} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$, per cui la serie si comporta come $\sum_n \frac{1}{n}$ che diverge (armonica o volendo armonica generalizzata con $\alpha = 1$).

Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n}$.

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n^2 + 3n + 5}{7n^3 + 1} \cdot n = \frac{1}{7} \in]0, +\infty[$ quindi la serie data si comporta come $\sum_n b_n$, ossia diverge.

$$4. \sum_n \frac{n^{33} + 7}{5n^{36} + 1}.$$

Osserviamo che $a_n > 0$ sempre e che $a_n \rightarrow 0$ quindi la serie POTREBBE convergere.

Informale: $a_n \approx \frac{n^{33}}{5n^{36}} = \frac{1}{5n^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n^3}$, per cui la serie si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ - armonica generalizzata con $\alpha = 3$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n^3}$.

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n^{33} + 7}{5n^{36} + 1} \cdot n^3 = \frac{1}{5} \in]0, +\infty[$, per cui la serie data si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ quindi converge.

$$5. \sum_n \frac{3^n}{n!}$$

$a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$

criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ quindi la serie converge.

$$6. \sum_n \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}$$

$a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$

Informale: $a_n \approx \frac{3^n}{5^n} = (\frac{3}{5})^n$ e $\sum_n (\frac{3}{5})^n$ converge (serie geometrica con $a \in]-1, 1[$).

Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = (\frac{3}{5})^n$

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} \cdot \frac{5^n}{3^n} = \lim_n \frac{3^n ((\frac{2}{3})^n + 1)}{5^n ((\frac{4}{5})^n + 1)} \cdot \frac{5^n}{3^n} = 1 \in]0, +\infty[$ per cui la serie data si comporta come $\sum_n b_n$, quindi converge.

$$7. \sum_n \sin\left(\frac{n+3}{n^2+4}\right)$$

$a_n \geq 0$: infatti, $\frac{n+3}{n^2+4} \rightarrow 0+$, quindi $0 < \frac{n+3}{n^2+4} < \pi$ e $a_n \geq 0$, si ha anche $a_n \rightarrow 0$

Informale: $a_n \approx \sin \frac{n}{n^2} = \sin(\frac{1}{n}) \approx \frac{1}{n}$ e $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n \frac{1}{n}$ quindi diverge

Rigoroso: confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n}$.

$$8. \sum_n \left(\sin \frac{1}{3n} - \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{n} \right)$$

Osserviamo che $\lim_n a_n = \lim_n (\sin \frac{1}{3n} - \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{n}) = 0$,

quindi la serie POTREBBE convergere.

Informale: $\sin \frac{1}{3n} \approx \frac{1}{3n}$, $\frac{1}{3} \arctan \frac{1}{n} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$, quindi $a_n \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = 0$ **NO**

non basta, per capire il comportamento della serie dobbiamo sviluppare ulteriormente:

$\sin \frac{1}{3n} \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(3n)^3}$, $\frac{1}{3} \arctan \frac{1}{n} \approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} \right)$, quindi

$a_n \approx \frac{1}{3n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27n^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6 \cdot 27} \right) \frac{1}{n^3} = \frac{17}{162} \frac{1}{n^3}$

e $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^3}$ quindi converge.

Rigoroso: riprendiamo i calcoli fatti sopra tenendo conto del resto:

$a_n = \frac{17}{162} \frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$, quindi almeno per n grande $a_n > 0$.

Facciamo ora il confronto asintotico con la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n (\sin \frac{1}{3n} - \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{n}) \cdot n^3 = \frac{17}{162} \in (0, +\infty)$ per cui la serie data si comporta come $\sum_n b_n$ che è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3$, quindi converge.

Serie armonica e serie armoniche generalizzate.

1. Consideriamo la serie $\sum_n \frac{1}{n}$. Essa viene chiamata serie armonica perchè il termine $\frac{1}{n}$ è

la media armonica dei due termini adiacenti: $\frac{1}{n-1}$ e $\frac{1}{n+1}$. Si ha

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots \\ \geq & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \dots \end{aligned}$$

ed è chiaro che questa successione non è limitata superiormente. Quindi per confronto, la serie armonica diverge.

Si può dimostrare che la serie armonica è divergente anche osservando che la successione delle somme parziali non è di Cauchy. Infatti, $S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2. Consideriamo ora la serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Essa converge per confronto con la serie telescopica

$$\sum_n \frac{2}{n(n+1)} \text{ in quanto per ogni numero naturale } n > 0 \text{ si ha } \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$

Abbiamo visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$. Si dimostrerà più avanti usando

le serie di Fourier che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Consideriamo la serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$. Per confronto con la serie armonica deduciamo che la serie $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$, mentre per confronto con $\sum_n \frac{1}{n^2}$ otteniamo la convergenza per $\alpha \geq 2$. Resta da capire il comportamento della serie nel caso in cui $1 < \alpha < 2$.

Proviamo a ripetere il procedimento usato per dimostrare la divergenza della serie armonica, confrontando la serie data con una serie ottenuta usando questa volta le potenze di $\frac{1}{2^\alpha}$. Allora:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \frac{1}{10^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} + \frac{1}{12^\alpha} + \frac{1}{13^\alpha} + \frac{1}{14^\alpha} + \frac{1}{15^\alpha} + \frac{1}{16^\alpha} + \dots \\ & \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}}_{2\frac{1}{2^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}}_{4\frac{1}{4^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}}_{8\frac{1}{8^\alpha}} + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}. \end{aligned}$$

Quindi per $1 < \alpha < 2$ la serie $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Il procedimento usato per questa dimostrazione si applica in casi più generali, infatti vale il seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 6 (criterio della serie condensata)

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi con $(a_n)_n$ una successione decrescente. Allora le due serie

$$\sum_n a_n \quad \text{e} \quad \sum_n a_{2^n} 2^n$$

hanno lo stesso comportamento.

La convergenza delle serie armoniche generalizzate segue subito dal confronto con i corrispondenti integrali impropri. Dimostriamo il seguente

Teorema 7 (criterio dell'integrale per la convergenza delle serie)

Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione non negativa e debolmente decrescente. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

risulta convergente se e solo se f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Dimostrazione Essendo f decrescente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \text{per ogni } x \in [k, k+1].$$

Integrando tra k e $k+1$ si ottiene:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

Sommando per k tra 0 e n deduciamo che:

$$\sum_{k=0}^n f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^n f(k)$$

e per concludere è sufficiente passare al limite per $n \rightarrow +\infty$, osservando che

$$\sum_{k=0}^n f(k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k).$$

Dimostriamo i criteri di convergenza enunciati prima.

Criterio del confronto: Per ipotesi $0 \leq b_n \leq a_n$ per ogni n (pur di modificare eventualmente un numero finito di termini). Allora

$$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq b_0 + b_1 + \dots + b_n = S_n^b \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

- se $S_n^b \rightarrow +\infty$ (cioè la serie $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$) allora, per il confronto tra limiti anche $S_n^a \rightarrow +\infty$, quindi anche la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$
- se la serie $\sum_n a_n$ converge, cioè $S_n^a \rightarrow \ell$ per un certo $\ell < +\infty$, allora S_n^b non può tendere a $+\infty$. Siccome per monotonia S_n^b ha limite, concludiamo che S_n^b converge ad un certo numero reale, cioè la serie $\sum_n b_n$ è convergente.

Criterio della radice: Supponiamo sia $a_n \geq 0$ e $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, in modo da avere $\ell + \varepsilon < 1$. Allora per la definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$, cioè definitivamente, si abbia:

$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$, quindi $a_n < (\ell + \varepsilon)^n$. Essendo $\ell + \varepsilon < 1$, la serie $\sum_n (\ell + \varepsilon)^n$ converge, quindi per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ converge.

Supponiamo sia $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$. Allora scegliamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, in modo da avere $1 < \ell - \varepsilon$. Per la definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$, cioè definitivamente, si abbia:

$1 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$, quindi $(\ell - \varepsilon)^n < a_n$. Essendo $1 < \ell - \varepsilon$, la serie $\sum_n (\ell - \varepsilon)^n$ diverge a $+\infty$, quindi per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ diverge.

Criterio del rapporto: Supponiamo sia $a_n > 0$. Vediamo prima che

se esiste un numero q con $0 < q < 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge.

Sotto questa ipotesi si ha $a_1 \leq a_0 q$, $a_2 \leq a_1 q \leq a_0 q^2$, $\dots$, $a_{n+1} \leq a_n q \leq a_0 q^{n+1}$, per cui la serie $\sum_n a_n$ è maggiorata dalla serie $a_0 \sum_n q^n$ che è convergente, essendo $0 < q < 1$.

Come abbiamo già visto, il comportamento di una serie non cambia se modifichiamo solo un numero finito di termini, per cui è sufficiente richiedere che la disuguaglianza $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ sia verificata definitivamente, ossia da un certo $\bar{n}$ in poi.

Nello stesso modo si dimostra che

se esiste un numero $q > 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ (definitivamente), allora la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Dimostriamo ora il criterio del rapporto. Supponiamo che $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\ell + \varepsilon < 1$. Per la definizione di limite esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$, quindi per quanto visto sopra la serie $\sum_n a_n$ converge.

Se invece $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ allora esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\ell - \varepsilon > 1$ ed esiste un $\bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \ell - \varepsilon > 1$. Concludiamo come prima che la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto asintotico: Se $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0, \neq +\infty$ allora, dalla definizione di limite segue che

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande.}$$

Moltiplicando per $b_n > 0$ otteniamo: $\frac{\ell}{2}b_n \leq a_n \leq 2\ell b_n$ definitivamente.

Allora, per il criterio del confronto, le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento. Infatti,

- se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n 2\ell b_n = 2\ell \sum_n b_n$ converge, dunque, per confronto, $\sum_n a_n$ converge;
- se $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$, anche $\sum_n \frac{\ell}{2}b_n$ diverge, dunque, per confronto, $\sum_n a_n$ diverge.

1.2.2 Criteri per serie a termini di segno variabile

Per definizione una serie converge se la successione $(S_n)_n$ corrispondente ha un limite reale. Essendo $\mathbb{R}$ uno spazio metrico completo, questo succede se e solo se $(S_n)_n$ è una successione di Cauchy, ovvero se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \forall p > 0 \quad |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Definizione 3 Si dice che la serie $\sum_n a_n$ **converge assolutamente** se converge la serie $\sum_n |a_n|$.

Teorema 8 Criterio di convergenza assoluta: Se $\sum_n |a_n|$ converge allora anche $\sum_n a_n$ converge.

Quindi, dovendo studiare la convergenza di una serie $\sum_n a_n$ a termini di segno variabile, si può provare a studiare la convergenza della serie a termini positivi $\sum_n |a_n|$.

- Se $\sum_n |a_n|$ converge allora per il criterio di convergenza assoluta anche $\sum_n a_n$ converge.
- Se $\sum_n |a_n| = +\infty$ allora restano aperte tutte le quattro possibilità per la serie di partenza: convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$, indeterminata.

Attenzione: l'assoluta convergenza implica la convergenza, ma non viceversa.

Teorema 9 Criterio di Leibniz (criterio per le serie a segno alterno)

Consideriamo la serie $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ [cioè $a_n = (-1)^n \alpha_n$]
Supponiamo che

- a) $\alpha_n \geq 0$ (definitivamente) [la serie è a segni alterni]
- b) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ (definitivamente) [α_n è decrescente (debolmente)]
- c) $\alpha_n \rightarrow 0$ [α_n è infinitesima]

Allora la serie $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ converge.

Siccome $a_n \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha_n \rightarrow 0$, la terza ipotesi è semplicemente la condizione necessaria.

Esempi

1. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$

Con le notazioni sopra: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ e $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Osserviamo che sono verificate tutte le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi la serie converge.

Convergenza assoluta? No: $|a_n| = \frac{1}{n}$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

Quindi la serie data converge, ma non converge assolutamente.

2. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2}$

converge assolutamente

3. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Con le notazioni sopra: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ e $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Per $\alpha > 0$ la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ soddisfa tutte le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Siccome $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, la serie $\sum_n |a_n|$ è la serie armonica generalizzata che converge per $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq 1$. Quindi la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$, mentre converge per ogni $\alpha > 0$.

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2}$.

Si vede facilmente che $\alpha_n = \frac{n^2+1}{n^3+2} > 0$ e che $\alpha_n \rightarrow 0$. Verifichiamo la monotonia:

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha_{n+1} &= \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} - \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^3 + 2} = \frac{(n^2 + 1)((n+1)^3 + 2) - ((n+1)^2 + 1)(n^3 + 2)}{(n^3 + 2)((n+1)^3 + 2)} \\ &= \frac{(n^2 + 1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2) - (n^2 + 2n + 2)(n^3 + 2)}{(n^3 + 2)((n+1)^3 + 2)} \\ &= \frac{n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 3n^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n^5 - 2n^2 - 2n^4 - 4n - 2n^3 - 4}{(n^3 + 2)((n+1)^3 + 2)} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + 4n^2 - n - 1}{(n^3 + 2)((n+1)^3 + 2)} > 0 \end{aligned}$$

quindi la successione $(\alpha_n)_n$ è decrescente e si può applicare il criterio di Leibniz per concludere che la serie data converge.

La serie non converge assolutamente, come si può vedere dal criterio del confronto asintotico con $\sum_n \frac{1}{n}$.

Per la serie iniziale non possiamo fare il confronto asintotico con $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ perchè il criterio del confronto asintotico è valido solo per serie a termini **positivi**.

Si può comunque usare l'osservazione $\alpha_n \approx \frac{1}{n}$ per dimostrare la convergenza della serie $\sum_n a_n$ senza usare il criterio di Leibniz.

Possiamo infatti scrivere

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} - (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^n \left(\frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} - \frac{1}{n} \right) + (-1)^n \frac{1}{n} \\ &= (-1)^n \frac{n - 2}{n^4 + 2n} + (-1)^n \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Siccome la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente, se risulterà convergente anche la serie

$\sum_n (-1)^n \frac{n - 2}{n^4 + 2n}$, allora, per il teorema sulla somma di serie convergenti, si potrà concludere la convergenza della serie data.

Vediamo dunque quale è il comportamento della serie $\sum_n (-1)^n \frac{n - 2}{n^4 + 2n}$.

Per usare il criterio di Leibniz, dobbiamo dimostrare la monotonia come prima.

Possiamo invece usare il criterio di assoluta convergenza:

$$\begin{aligned} \sum_n |(-1)^n \frac{n - 2}{n^4 + 2n}| &= \sum_n \frac{n - 2}{n^4 + 2n} \text{ e questa serie converge per confronto asintotico con } \\ \sum_n \frac{1}{n^3} &\text{ in quanto } \lim_n \frac{n - 2}{n^4 + 2n} \cdot n^3 = 1. \end{aligned}$$

In conclusione, la serie di partenza $\sum_n a_n$ è somma tra una serie convergente assolutamente e una serie convergente, quindi è convergente.

Teorema 10 Criterio di Dirichlet Sia $\sum_n a_n$ una serie avente la successione delle somme parziali / delle ridotte $(S_n)_n$ limitata e sia $(q_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi, decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_n q_n a_n$$

è convergente.

Attenzione Questo criterio riguarda solo la convergenza della serie $\sum_n q_n a_n$; non dà informazioni sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Dimostrazione dei criteri di convergenza

Criterio di convergenza assoluta: La successione delle somme parziali relative ad $|a_n|$ è convergente per ipotesi (la serie converge assolutamente), quindi è una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon,$$

cioè la successione delle somme parziali relative ad a_n è di Cauchy, quindi convergente, ossia la serie $\sum_n a_n$ converge.

Criterio di Leibniz Sia $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k$. Usando la monotonia della successione $(\alpha_n)_n$ si osserva che $(S_{2n})_n$ è una successione decrescente (debolmente) di numeri positivi, quindi ha un limite finito (compreso tra 0 e α_0), mentre la successione $(S_{2n+1})_n$ è crescente (debolmente), quindi ha limite. Essendo $S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1}$, siccome $\alpha_{2n+1} \rightarrow 0$ concludiamo che le successioni $(S_{2n})_n$ e $(S_{2n+1})_n$ hanno lo stesso limite finito, quindi la serie $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ converge.

Criterio di Dirichlet Sia $M > 0$ tale che $|S_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $(\sigma_n)_n$ la successione delle somme parziali della serie $\sum_n q_n a_n$. Essendo $a_k = S_k - S_{k-1}$ per tutti $k \geq 1$, possiamo scrivere σ_n usando S_n :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= q_0 a_0 + q_1 a_1 + \cdots + q_k a_k + \cdots + q_n a_n \\ &= q_0 S_0 + q_1 (S_1 - S_0) + \cdots + q_k (S_k - S_{k-1}) + \cdots + q_n (S_n - S_{n-1}) \\ &= S_0 (q_0 - q_1) + \cdots + S_k (q_k - q_{k+1}) + \cdots + S_{n-1} (q_{n-1} - q_n) + S_n q_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_k (q_k - q_{k+1}) + S_n q_n. \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che $(\sigma_n)_n$ converge. Osserviamo intanto che $\lim_n S_n q_n = 0$. Per concludere resta da dimostrare che la serie $\sum_k S_k (q_k - q_{k+1})$ è convergente. Usiamo il criterio della convergenza assoluta. Essendo $q_k - q_{k+1} \geq 0$, si ha $|S_k (q_k - q_{k+1})| = |S_k| (q_k - q_{k+1}) \leq M (q_k - q_{k+1})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per confronto con la serie telescopica $\sum_k M (q_k - q_{k+1})$ che è convergente con somma $M q_0$, concludiamo che la serie $\sum_k S_k (q_k - q_{k+1})$ è assolutamente convergente, quindi convergente. Risulta così convergente la successione $(\sigma_n)_n$, il che per definizione ci dà la convergenza della serie $\sum_n q_n a_n$.

1.3 Riordinamento di una serie.

Le seguenti osservazioni dovrebbero far capire che c'è una differenza fondamentale tra somme finite e serie.

Data una serie $\sum_n a_n$ si dice che la serie $\sum_n b_n$ è un **riordinamento** della serie $\sum_n a_n$ se ad ogni termine della prima corrisponde uno e un solo termine della seconda, cioè se esiste una funzione biettiva $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $b_n = a_{\varphi(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, la serie $\sum_n b_n$ è un riordinamento della serie $\sum_n a_n$ se le due serie hanno gli stessi termini, eventualmente sommati in ordine diverso.

Se sommiamo un numero finito di termini l'ordine in cui vengono sommati non conta, il risultato è lo stesso, in base alle proprietà di associatività e di commutatività dell'addizione. Nel caso in cui si tratta di sommare infiniti numeri queste proprietà non valgono più.

Se una serie è convergente, ma non assolutamente convergente, allora un suo riordinamento potrebbe avere una somma diversa, come mostra il seguente esempio.

Consideriamo la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = - \sum_n (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Si vede subito con il criterio di Leibniz che si tratta di una serie convergente. Usando le serie di Taylor si può calcolare la sua somma. Questa serie non è assolutamente convergente: $|(-1)^n \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$ e, come abbiamo già visto, la serie armonica è divergente.

Moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ la serie data e otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots \end{aligned}$$

questa nuova serie è una serie convergente e ha come somma $\frac{1}{2}$ per la somma della serie iniziale. La sommiamo termine a termine alla serie data e otteniamo ancora una serie convergente che ha come somma $\frac{3}{2}$ per la somma della serie di partenza:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \dots \\ & + \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots \\ & = \\ & 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{2}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{2}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\ & = \\ & 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \dots \end{aligned}$$

Si osserva però che questa serie è un riordinamento della serie iniziale e come abbiamo notato ha come somma $\frac{3}{2}$ per la somma della serie iniziale. Vale il seguente risultato.

Teorema 11 (di Riemann) *Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente ma non assolutamente convergente. Per ogni numero S esiste un riordinamento della serie data che è convergente con somma S . Esistono anche riordinamenti di $\sum_n a_n$ che sono divergenti a $+\infty$, che sono divergenti a $-\infty$ ed altri che sono indeterminati.*

Questo fenomeno non si presenta nel caso delle serie assolutamente convergenti:

Teorema 12 (di Dirichlet) *Se la serie $\sum_n a_n$ è assolutamente convergente e $\sum_n b_n$ è un suo riordinamento, allora $\sum_n b_n$ è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa*

$$\text{somma: } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

1.4 Massimo limite, minimo limite

Il teorema di Bolzano-Weierstrass ci dice che ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente.

Attenzione: NON è vero che ogni successione limitata ha limite.

Si può dimostrare che

ogni successione di numeri reali ha una sottosuccessione che ha limite (in $\overline{\mathbb{R}}$).

Infatti, se la successione non è limitata superiormente, ha una sottosuccessione che ha limite $+\infty$, se non è limitata inferiormente, ha una sottosuccessione che ha limite $-\infty$, se invece è limitata, la conclusione è data dal teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione. Diciamo che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto limite** di una successione se questa ha una sottosuccessione che ha limite ℓ .

Una successione può avere diversi punti limite, però ha limite se e solo se ha un unico punto limite.

Si può dimostrare che per ogni successione $(a_n)_n$ esistono (in $\overline{\mathbb{R}}$) il minimo e il massimo punto limite, che vengono indicati con

$$\min \lim_n a_n \quad \max \lim_n a_n .$$

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali definiamo le seguenti successioni (in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$a'_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \quad a''_n = \sup\{a_k : k \geq n\} .$$

Esercizio. Dimostrare che a'_n è crescente (debolmente) e a''_n è decrescente (debolmente).

Essendo monotone, le due successioni a'_n e a''_n hanno limite e questi limiti vengono indicati con

$$\begin{aligned} \liminf_n a_n &= \lim_n a'_n = \lim_n (\inf_{k \geq n} a_k) \\ \limsup_n a_n &= \lim_n a''_n = \lim_n (\sup_{k \geq n} a_k) . \end{aligned}$$

Si può dimostrare che

$$\liminf_n a_n = \min \lim_n a_n \quad \limsup_n a_n = \max \lim_n a_n .$$

Esercizio. Se $a_n > 0$, allora

$$\begin{aligned} \max \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\implies a_n \rightarrow 0 , \\ \min \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\implies a_n \rightarrow +\infty . \end{aligned}$$

Se invece $L = \max \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ allora il comportamento della successione non è determinato da questo limite: sappiamo che esiste una sottosuccessione a_{n_k} che ha limite 1, però se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ possiamo costruire esempi in cui la successione a_n ha diversi comportamenti: non ha limite, ha limite 0, ha limite $+\infty$, o ha come limite un qualsiasi numero positivo.

1.5 Completezza di $\mathbb{R}$

Sia (X, d) uno spazio metrico, cioè un insieme X su cui abbiamo definito una distanza d , più precisamente, una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- a) $d(x, x') \geq 0$;
- b) $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$;
- c) $d(x, x') = d(x', x)$;
- d) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Definizione. Diciamo che $(a_n)_n$ è una **successione di Cauchy** in X se comunque preso un numero positivo ε , si può trovare un indice $\bar{n}$ tale che se m e p sono due qualsiasi indici maggiori di $\bar{n}$, i corrispondenti termini della successione a_m e a_p distano per meno di ε . In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } p \geq \bar{n}] \implies d(a_m, a_p) < \varepsilon.$$

Lo spazio metrico X si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X ha limite **in** X .

Osservazioni 1. Le successioni di Cauchy sono limitate. (Per vederlo basta prendere $\varepsilon = 1$ nella definizione.)

2. Se una successione $(a_n)_n$ ha limite, allora è di Cauchy. (Segue dalla disuguaglianza triangolare.) Il viceversa non è sempre vero. Infatti $\mathbb{Q}$ non è completo. (Per esempio, esistono successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$ che hanno come limite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

Teorema 13 $\mathbb{R}$ è completo.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Per quanto osservato sopra, la successione $(a_n)_n$ è limitata. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite ℓ .

Dimostriamo ora che tutta la successione ha limite ℓ . Fissato $\varepsilon > 0$,

$$\exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } p \geq \bar{n}] \implies d(a_m, a_p) < \varepsilon.$$

Essendo $\lim_k a_{n_k} = \ell$ e $\lim_k n_k = +\infty$,

$$\exists \bar{k} : k \geq \bar{k} \implies d(a_{n_k}, \ell) < \varepsilon \text{ e } n_k > \bar{n}.$$

Allora per $n \geq \bar{n}$

$$d(a_n, \ell) \leq d(a_{n_k}, \ell) + d(a_{n_k}, a_n) < 2\varepsilon,$$

cioè $\lim_n a_n = \ell$ e la dimostrazione della completezza di $\mathbb{R}$ è dunque conclusa.