Lezione 5 - 30/9/2025

Esercizio: provare che

$$0+1+8+27+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

provo per induzione.

i) ¿ $P(0)$ è vera? sì $\quad 0 = \left(\frac{0\cdot 1}{2}\right)^2 = 0$ vera!

ii) ¿ $\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$0^3+1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$

$P(n):\quad 0+1+8+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\Downarrow$ aggiungo $(n+1)^3$ da tutte e 2 le parti

$$0+1+8+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$0+1+8+\dots+n^3+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2+(n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}$$

$$0+1+8+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \quad : \quad P(n+1)$$

OK vera!

conclusione

se devo provare che $P(n)$ è vera per ogni n oppure $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$

si può tentare con l'induzione

$\forall n$, vale $P(n)$

$\Updownarrow$

$\left(P(0) \text{ vera e } \left(\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)\right)$

$\forall n \geq n_0$ vale $P(n)$

$\Updownarrow$

$P(n_0)$ vera e $\forall n \geq n_0\ \ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

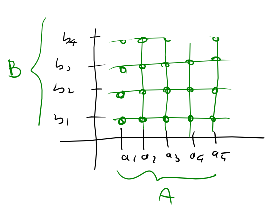
CALCOLO COMBINATORIO

Problemi di conteggio (del numero di elementi di predeterminati insiemi)

1) siano A, B insiemi con $|A| = n$, $|B| = m$ ($|A| = n$ significa che A ha n elementi)

¿ quanti elementi ha $A \times B$?

$$|A \times B| = |A|\cdot|B| = n \cdot m$$



2) siano A, B insiemi

$|A| = n$, $|B| = m$

indico con B^A l'insieme delle funzioni da A a B

¿ quanti sono gli elementi di B^A ?

cioè

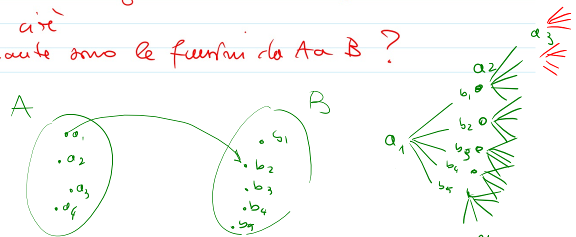
¿ quante sono le funzioni da A a B ?

indico con B^A l'insieme delle funzioni da A a B

¿ quanti sono gli elementi di B^A ?

cioè

¿ quante sono le funzioni da A a B ?



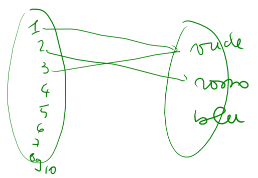
$f(a_1)$: 5 scelte

$f(a_2)$: 5 scelte

$5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^4$

in generale ho $|B^A| = |B|^{|A|}$

ES. ho 10 caselle che voglio colorare con 3 colori. In quanti modi?

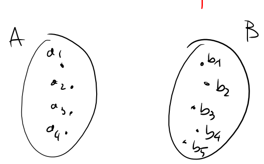


$3\,3\,3 = 3^{10}$

tradizionalmente si parla in questo caso del numero di disposizioni con ripetizione (di m oggetti n a n)

3) siano A, B insiemi con $|A| = n$, $|B| = m$ e $m \geq n$

¿ quante sono le funzioni iniettive da A a B?



per $f(a_1)$ ho 5 scelte

" $f(a_2)$ ho 4 scelte

$f(a_3)$ ho 3 scelte

$f(a_4)$ ho 2 scelte.

$n=4$

$m=5$

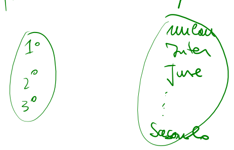
$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ funzioni iniettive possibili

indico con $D_{m,n}$ l'insieme delle iniettive di A con n el. a B con m el.

$$|D_{m,n}| = \underbrace{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}_{n}$$

tradizionalmente si parla di disposizioni (semplici) di m oggetti n a n

ES. campionato con 20 squadre e voglio contare le possibili classifiche 1°, 2°, 3°,



$20\cdot 19\cdot 18$

$|D_{20,3}|$

4) supponiamo che $|A| = |B| = n$

le funzioni da A a B iniettive sono anche suriettive

sono anche biiettive

4) supponiamo che $|A| = |B| = n$

le funzioni da A a B iniettive sono anche suriettive quindi sono anche biiettive

¿ quante sono le biiettive da A a B (A e B hanno lo stesso numero di elementi)!

$\Updownarrow$

¿ quante sono le iniettive da A in sé stesso?

$\Updownarrow$

¿ in quanti modi si possono mettere in fila n oggetti ?

tradizionalmente si parla di Permutazioni di n oggetti P_n

$$|P_n| = n(n-1)(n-2)\dots(2)\cdot 1 = n! \leftarrow \text{n fattoriale}$$

Es. ho una scacchiera 4×4 e ho 16 pedine tutte diverse,
in quanti modi le posso disporre sulla scacchiera?

$16!$

5) supponiamo che $|A| = n$ e consideriamo $k \in \mathbb{N}$ con $0 \le k \le n$

¿ quanti sono i sottoinsiemi di A con k elementi ?

esempio $|A| = 3$ $A = \{a, b, c\}$

i sottoinsiemi di A sono

$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

con	0 elementi	ne	ho	1
	1 "	"	"	3
	2 "	"	"	3
	3 "	"	"	1

se scelgo k elementi da n e conto l'ordine quanti ne ottengo ?

$$|D_{n,k}| = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Per sceglierli con l'ordine posso sceglierli senza ordine e poi i k pescati li ordino

indico con $C_{n,k}$ le scelte di k senza ordine

$$\boxed{|D_{n,k}| = |C_{n,k}|\cdot|P_k|}$$

Concludiamo

$$|C_{n,k}| = \frac{|D_{n,k}|}{|P_k|}$$

$$|C_{n,k}| = \frac{|D_{n,k}|}{|P_k|}$$

so che $|D_{n,k}| = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 1}{(n-k)\cdots 1}$

$= \frac{n!}{(n-k)!}$

$|P_k| = k!$

Conclusione $\quad |C_{n,k}| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ← numero di sottoinsiemi con k elementi da un insieme con n elementi

tradizionalmente si parla di combinazioni di n oggetti a k a k

$$|C_{n,k}| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

si legge "n sopra k"

es. $n=3$, $k=1$ $\quad \binom{3}{1} = |C_{3,1}| = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3\cdot\cancel{2\cdot 1}}{1\cdot\cancel{2\cdot 1}} = 3$

Esempio $\quad$ ho un'urna con 90 numeri,
ne pesco 5
quante sono le possibili pescate? $\quad$ LOTTO

non conto l'ordine $\longrightarrow$ $|C_{90,5}| = \binom{90}{5} = \frac{\cancel{90!}}{5!\,\cancel{85!}} = \frac{\cancel{90!}\ 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5!}$

$= \frac{\overset{9}{\cancel{90}}\cdot 89\cdot \overset{22}{\cancel{88}}\cdot \overset{29}{\cancel{87}}\cdot 86}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 9\cdot 89\cdot 22\cdot 29\cdot 86 \sim 43\cdot 10^6$

$\binom{90}{6} \sim \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \sim 43\cdot 10^6\cdot\frac{85}{6}$

ES. $\quad$ 3 carte da un mazzo di 40
in quanti modi? $\quad \binom{40}{3} = \frac{\overset{20}{\cancel{40}}\cdot\overset{13}{\cancel{39}}\cdot 38}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 20\cdot 13\cdot 38 = 9880$

ES. $\quad$ 3 carte da un mazzo di 40
quante le estrazioni con 3 denari? $\quad \binom{10}{3} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 8}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 120$

qual è la prob che pescando 3 carte da 4 siano 3 denari? $\quad = \frac{\text{casi fav}}{\text{casi possib}}$

$$\frac{120}{9880} = \frac{3}{247} \approx 0{,}012 \sim 1\%$$

ES $\quad$ quante le pescate con almeno un asso?

1° modo $\quad$ esatt. 1 asso $\quad \binom{4}{1}\binom{36}{2}$
$+$ esatt. 2 assi $\quad \binom{4}{2}\binom{36}{1}$
$+$ esatt. 3 assi $\quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

ES quante le pescate con almeno un asso?

1° modo

esatt. 1 asso $\binom{4}{1}\binom{36}{2}$

+ esatt. 2 assi $\binom{4}{2}\binom{36}{1}$

+ esatt. 3 assi $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

$$= \binom{4}{1}\cdot\binom{36}{2} + \binom{4}{2}\binom{36}{1} + \binom{4}{3}$$

$$\overset{!}{=} 4 \cdot 630 + 216 + 4 = 2740$$

2520

$\binom{36}{2} = \frac{36 \cdot 35}{2} \quad 18 \cdot 35$

$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 36$

2° pescate senza assi $\binom{36}{3} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3 \cdot 2} = 6 \cdot 35 \cdot 34 \overset{!}{=} 7140$

$$2740 = 9880 - 7140$$! giusto !

ES. da un'urna con 90 palline ne estraggo 5 numerate

quante estrazioni contengono 2 numeri fissati

$$\binom{88}{3} = \frac{\overset{44}{\cancel{88}} \cdot \overset{29}{\cancel{87}} \cdot 86}{\cancel{6}\,3} = 44 \cdot 29 \cdot 86 = 109{,}736$$

prob. ambo $\frac{109{,}736}{\sim 43 \cdot 10^6} \approx 0{,}002$

500 la posta

250

ES un'urna contiene 10 bianche e 5 rosse

ne estraggo 5

quante sono le estrazioni con 2 palline bianche e 3 rosse.