11

30 settembre

<u>Esercizio</u> Verificare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ è una funzione non costante, allora il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste

Riporto. Visto che f non è costante, $\exists$ x_1 e x_2 in $\mathbb{R}$ t.c. $f(x_1) \neq f(x_2)$

Supponiamo per assurdo che $\exists\ L \in \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

D'altra parte $f(x_1 + nT) = f(x_1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$f(x_2 + nT) = f(x_2).$$

$$x_1 + nT > M_\varepsilon \xLeftrightarrow{T>0} n > \frac{M_\varepsilon - x_1}{T} \Rightarrow |\underbrace{f(x_1 + nT)}_{f(x_1)} - L| < \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che

$$|f(x_1) - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \implies f(x_1) = L$$

$$x_2 + nT > M_\varepsilon \iff n > \frac{M_\varepsilon - x_2}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$|\underbrace{f(x_2 + nT)}_{f(x_2)} - L| < \varepsilon$$

$f(x_1) =$
$= f(x_2)$
ossia

Concludiamo che $|f(x_2) - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies f(x_2) = L$

La condizione $f(x_1) = f(x_2)$ è assurda perché supponiamo che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Non esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L .$$

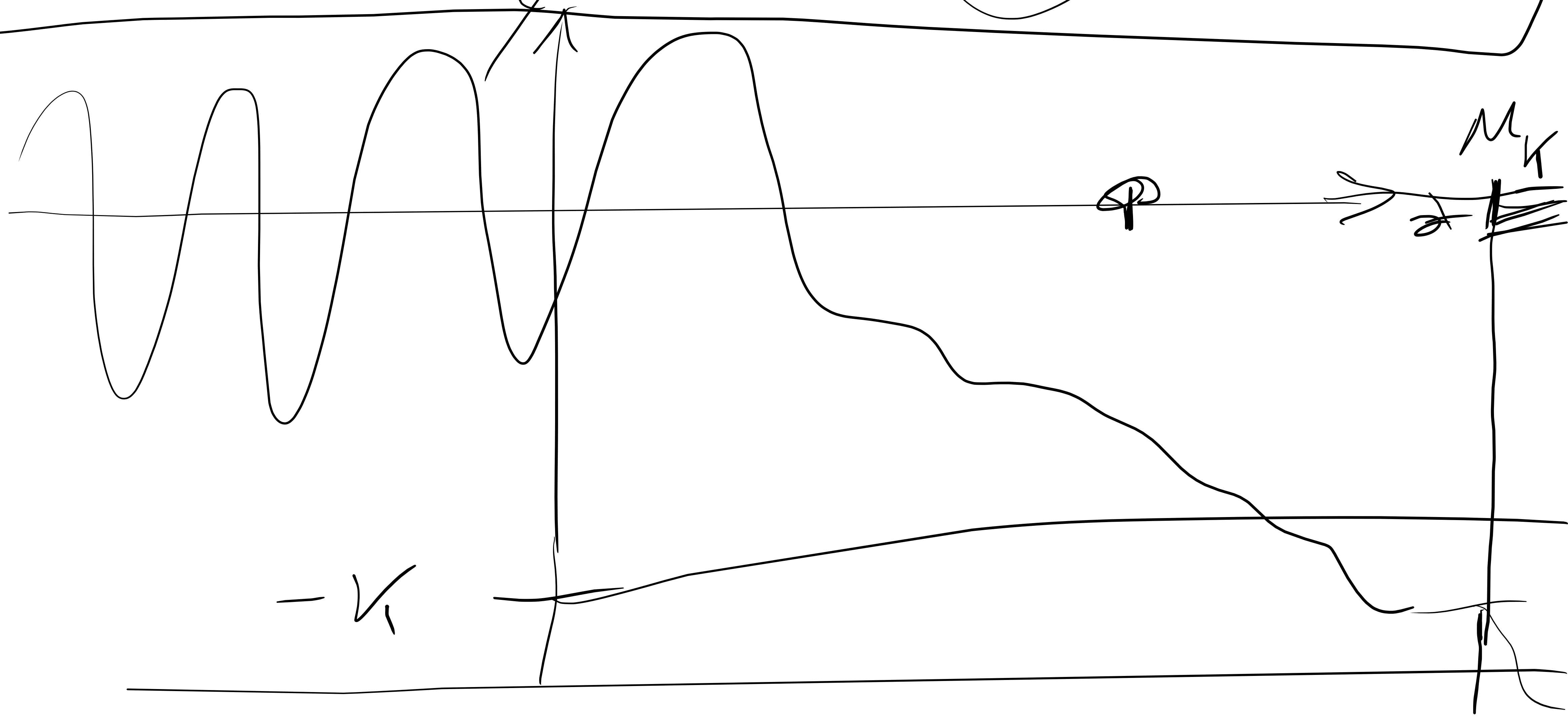
Verifichiamo che non può essere

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty .$$ Supponiamo

per assurdo che è vero

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ significa che

$\forall K > 0 \ \exists M_K$ t.c. $x > M_K \Rightarrow f(x) < -K$



$\forall K > 0 \ \exists M_K$ t.c. $x > M_K \implies f(x) < -\cancel{K}$

Verifichiamo che questo è assurdo per tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiche di periodo $T > 0$

$\forall K > 0$ risulta $f(x_0) < -K$ assurdo

Scegliamo $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0) = f(x_0 + nT) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$x_0 + nT > M_K \iff n > \frac{M_K - x_0}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{f(x_0 + nT)}_{= f(x_0)} < -K$$

Teor (Regole dei limiti) $X \subseteq \mathbb{R}$ $\sup X = +\infty$

$f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

1) Regola della somma

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + g(x) \big) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$= a + b$$

sempre eccetto nei casi in cui $a+b$ non è stato definito $(a, b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$

2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} g(x) = a\,b$$

sempre eccetto i casi in cui $a \cdot b$ non è stato definito

$$(a,b) = \begin{cases} (0, \pm\infty) \\ (\pm\infty, 0) \end{cases}$$

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{a}{b}$$

eccetto $b=0$ $\qquad (a,b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

Dim della regola della somma e solo nel caso $a, b \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon^{(1)}$ t.c. $x > M_\varepsilon^{(1)}$ e $x \in X \implies |f(x) - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon^{(2)}$ t.c. $x > M_\varepsilon^{(2)}$ e $x \in X \implies |g(x) - b| < \varepsilon$

Sia ora $M_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)}\}$ e prendiamo $x > M_\varepsilon$ e $x \in X$

$$|f(x) + g(x) - (a+b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \le$$

$$\le |f(x) - a| + |g(x) - b| < 2\varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (a+b)| < 2\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$ t.c. $x > N_\varepsilon$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (a+b)| < \varepsilon$

Basta prendere $\boxed{N_\varepsilon} = M_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Vogliamo dimostrare che se

$x \in \mathrm{Dom}(\tan)$ allora

$x + m\pi \in X \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$. Verifica:

$$x \in \mathrm{Dom}(\tan x) \iff x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

~~Se per assurdo esistesse $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$ t.c.~~

~~$x + m\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$~~

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo che sia falso che

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{Dom}(\tan x) \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ si ha } x + n\pi \in \mathrm{Dom}(\tan x).}$$

Allora

$\exists\, x \in \mathrm{Dom}(\tan x)$ ed $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$x + n\pi \notin \mathrm{Dom}(\tan x) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cioè $x + n\pi \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cioè $\exists\, k_0 \in \mathbb{Z}$ t.c.

$x + n\pi = \frac{\pi}{2} + k_0\pi$. Concludo che vale

$$x = \frac{\pi}{2} + (k_0 - n)\pi \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\Longrightarrow x \notin \mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} x =$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\forall K > 0 \quad \exists M_K \quad t.c. \quad x > M_K \Rightarrow x > K$$

$$M_K = K$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} x \, x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) \cancel{=} +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x = \lim_{x \to +\infty} (-1) \cdot x = -1 (+\infty) = -\infty$$

$$x^2 - x = \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{\Big(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{0}\Big)}_{1} \longrightarrow +\infty$$

Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$ $\qquad$ a_0 termine costante

a_n è il coefficiente principale.

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\boxed{a_n x^n} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \overbrace{\frac{a_0}{x^n}}^{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \left(1 + \overbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n x}}^{0} + \dots + \overbrace{\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}}^{0} + \overbrace{\frac{a_0}{x^n}}^{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + \cancel{x^2 + x + 1}}{4x^4 + \cancel{x^3 + x + 2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{4x^4} \frac{\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{2x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2}x^3}{\cancel{4}_{2}x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$