$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1/2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \mathrm{II} - 3\cdot \mathrm{I}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \mathrm{III} - 2\cdot \mathrm{I} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \mathrm{III} - \mathrm{II}$$

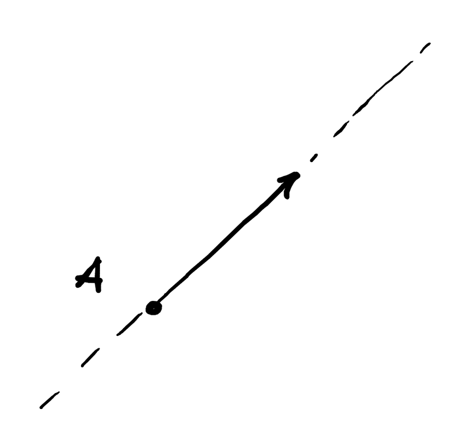
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

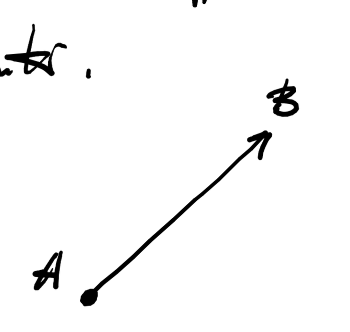
Vettori applicati e vettori liberi

Un **vettore applicato** è un **segmento orientato**, ed è dunque caratterizzato da:

* un punto di applicazione
* direzione
* verso
* lunghezza (o modulo)

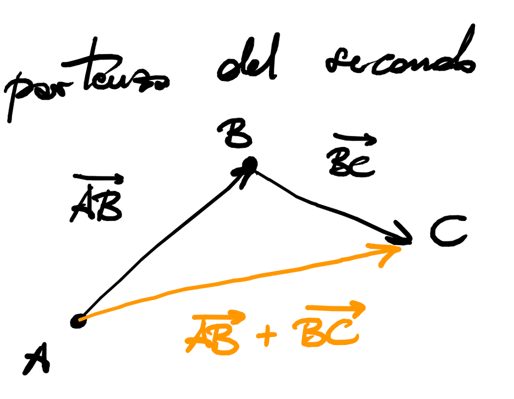


Un vettore applicato è anche determinato da una **coppia** ordinata di punti.



in questo caso il vettore applicato si denota con $\overrightarrow{AB}$ e il suo modulo si denota con $|\overrightarrow{AB}|$

I vettori applicati si possono **sommare**, ma non sempre: è necessario (e sufficiente) che il punto di arrivo del primo vettore coincida con il punto di partenza del secondo vettore applicato:



Attenzione: se $B \neq C$, allora non posso sommare $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

Ricordiamo che per le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali vale la proprietà associativa, ovvero vale che $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ vale che

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

e anche $(ab)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

Prop: se è definita, la somma tra vettori applicati gode della proprietà associativa, ovvero

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

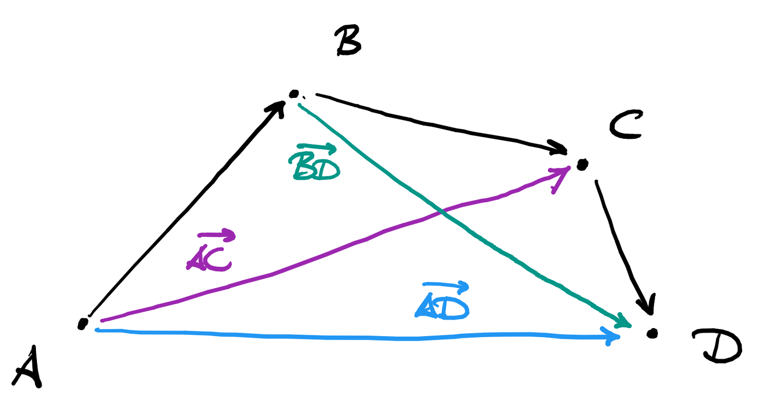
per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$, ovvero per ogni quattro punti A, B, C e D del piano.

Dim: per mostrare che vale la proprietà associativa calcoliamo esplicitamente il membro sinistro e il membro destro dell'uguaglianza da dimostrare, e verifichiamo che otteniamo in entrambi i casi il medesimo vettore applicato.

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

graficamente



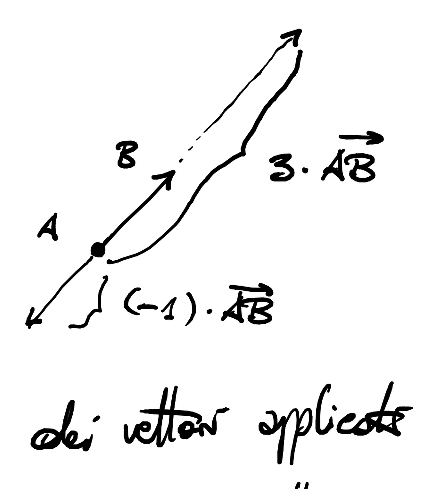
□

Def: dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ come il vettore applicato determinato nel modo seguente:

- se $\alpha = 0$, definiamo $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$
- se $\alpha \neq 0$, definiamo $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ come quel vettore applicato che:
  * ha punto di applicazione uguale ad A
  * ha la medesima direzione di $\overrightarrow{AB}$
  * ha modulo uguale ad $|\alpha| \cdot |\overrightarrow{AB}|$

  se $\alpha > 0$
  * ha lo stesso verso di $\overrightarrow{AB}$

  se $\alpha < 0$
  * ha verso opposto a quello di $\overrightarrow{AB}$



Abbiamo introdotto dei vettori applicati del tipo $\overrightarrow{AA}$. Notiamo che

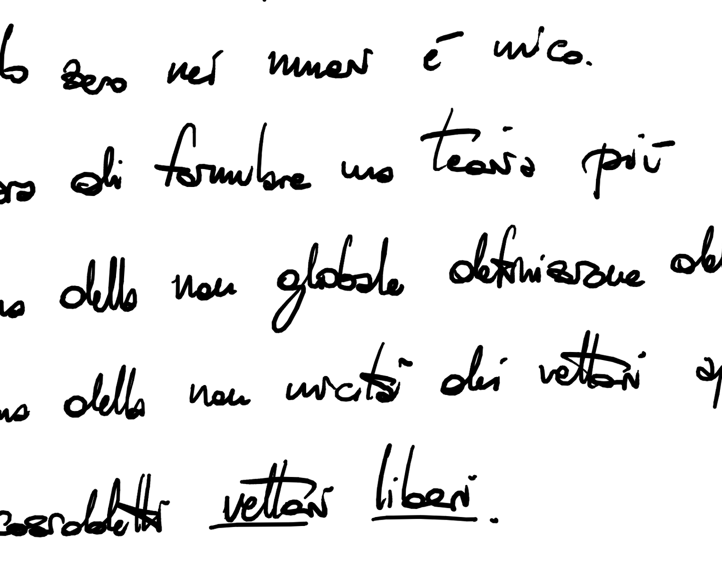
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \end{array}\right\}$$

i vettori applicati del tipo $\overrightarrow{AA}$ e $\overrightarrow{BB}$ si comportano in maniera simile a come si comporta lo zero nei numeri.

Per questo motivo, i vettori applicati del tipo $\overrightarrow{AA}$ sono detti **vettori applicati nulli**. Vi sono però profonde differenze con lo zero nei numeri: ad esempio, i vettori applicati nulli sono tanti quanti i punti del piano, mentre lo zero nei numeri è unico.

Cerchiamo ora di formulare una teoria più "solida", che possa risolvere il problema della non globale definizione della somma tra vettori applicati e il problema della non unicità dei vettori applicati nulli. Introduciamo quindi i cosiddetti **vettori liberi**.

Def: due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono **equipollenti** (e in questo caso scriviamo $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) se e solo se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo (ovvero, differiscono solamente per il punto di applicazione)



si verifica che la relazione di equipollenza è una **relazione di equivalenza**, ovvero essa è **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**

Def: dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, definiamo la sua **classe di equipollenza**, che indichiamo con $[\overrightarrow{AB}]$ come l'insieme

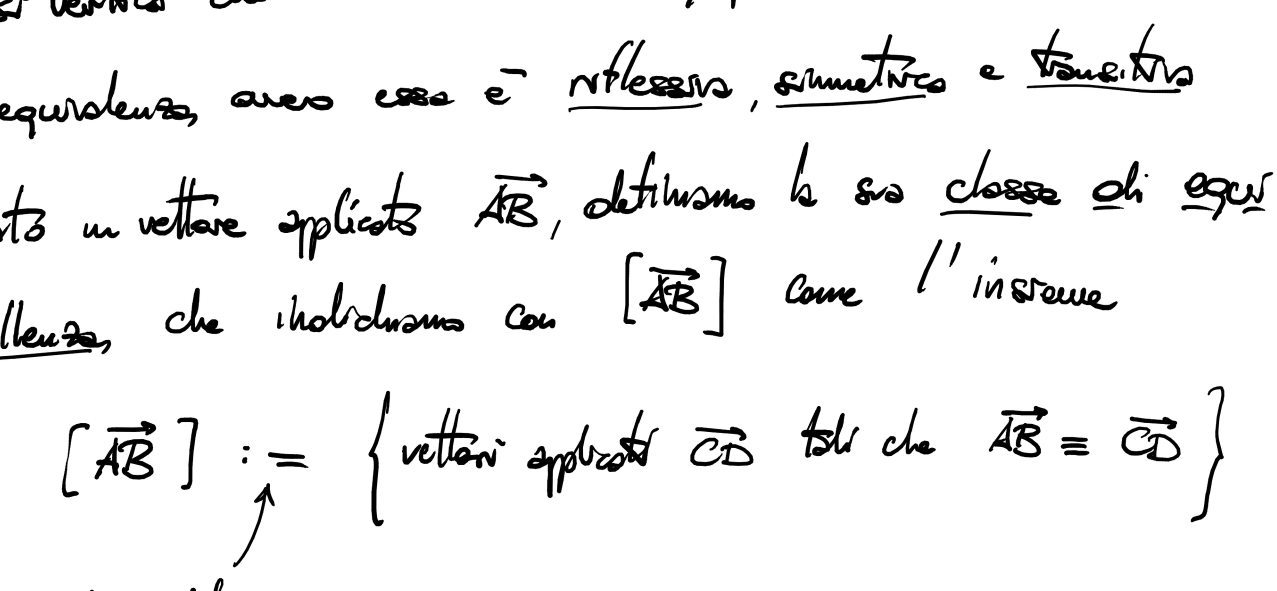
$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{vettori applicati } \overrightarrow{CD} \text{ tali che } \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

"per definizione"

Oss: se $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, allora $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$
in particolare $[\overrightarrow{AA}] = [\overrightarrow{BB}]$ per ogni A e B punti del piano

Oss: $[\overrightarrow{AA}] = \{\text{vettori applicati nulli}\}$

Prop: dai risultati della geometria euclidea abbiamo che, dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un punto C, esiste sempre un unico vettore applicato $\overrightarrow{CD}$ equipollente ad $\overrightarrow{AB}$



da questo segue che, data una classe di equipollenza $\vec{V}$ e dato un punto C, esiste sempre un vettore applicato $\overrightarrow{CD}$ che appartiene a $\vec{V}$, ovvero $\overrightarrow{CD} \in \vec{V}$

Def: se $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ (e dunque $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$), allora si dice che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono **rappresentanti** della medesima classe di equipollenza.

Def: un **vettore libero** è una classe di equipollenza di vettori applicati.