Vettori liberi = Classi di equipollenza di vettori applicati.

Def: tutti i vettori applicati nulli formano una singola classe di equipollenza, ovvero un vettore libero, che denotiamo con $\vec{O}$.

Def: dati due vettori liberi $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definiamo la loro <u>somma</u> (che denotiamo con $\vec{u}+\vec{v}$) nella maniera seguente:

1. scegliamo un rappresentante $\vec{AB}$ per $\vec{u}$, ovvero
$$[\vec{AB}] = \vec{u}$$
2. scegliamo un rappresentante di $\vec{v}$ tale per cui il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore $\vec{BC}$ tale che
$$[\vec{BC}] = \vec{v}$$
3. calcoliamo $\vec{AB}+\vec{BC}$, ovvero $\vec{AC}$
4. definiamo $\vec{u}+\vec{v} := [\vec{AC}]$

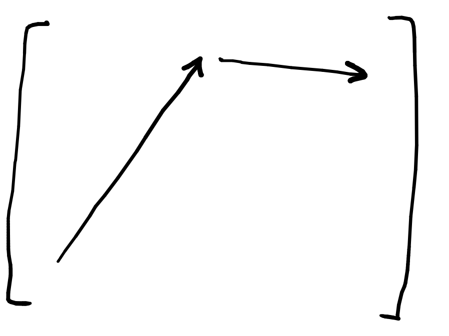
si può dimostrare che questa costruzione <u>non</u> dipende dalla scelta del rappresentante $\vec{AB}$ di $\vec{u}$.

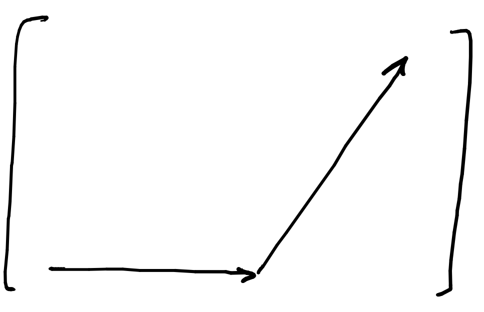
Oss: sia $\vec{v}$ un vettore libero; ci domandiamo chi sia
$$\vec{O}+\vec{v} = \,?$$
sia $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e consideriamo $\vec{AA}$ come rappresentante del vettore libero nullo $\vec{O}$, ovvero $\vec{O} = [\vec{AA}]$.

allora
$$\vec{O}+\vec{v} = [\vec{AA}+\vec{AB}] = [\vec{AB}] = \vec{v}$$
analogamente
$$\vec{v}+\vec{O} = [\vec{AB}+\vec{BB}] = [\vec{AB}] = \vec{v}$$
vediamo quindi che $\vec{O}$ si comporta come il numero 0

Notiamo che in questo modo la somma è definita per <u>ogni</u> coppia di vettori liberi! In questo modo abbiamo risolto i due "problemi" dei vettori applicati, ovvero il fatto che la somma fosse solo parzialmente definita e il fatto che vi fossero una pluralità di vettori nulli.

Oss: si può dimostrare che se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori liberi, allora
$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

 $= \vec{v}+\vec{w}$

 $= \vec{w}+\vec{v}$

La definizione della somma e l'esistenza del vettore nullo possono portare alla domanda: dato un vettore libero $\vec{v}$, esiste $\vec{w}$ tale che
$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v} = \vec{O}\ ?$$
Se $\vec{v} = [\vec{AB}]$, allora scegliamo $\vec{w} = [\vec{BA}]$. Verifichiamo che questa scelta sia corretta:
$$\vec{v}+\vec{w} = [\vec{AB}]+[\vec{BA}] = [\vec{AB}+\vec{BA}]$$
$$= [\vec{AA}] = \vec{O}$$
$$\vec{w}+\vec{v} = [\vec{BA}]+[\vec{AB}] = [\vec{BA}+\vec{AB}]$$
$$= [\vec{BB}] = \vec{O}$$
Tale vettore $\vec{w}$ si dice l'<u>opposto</u> di $\vec{v}$ e si denota $-\vec{v}$.

Similmente a quanto abbiamo fatto per la somma possiamo definire anche la moltiplicazione di un numero reale per un vettore libero: se $\vec{v}$ è un vettore libero e $\alpha \in \mathbb{R}$ e abbiamo $\vec{v} = [\vec{AB}]$, definiamo
$$\alpha \cdot \vec{v} := [\alpha \cdot \vec{AB}]$$
Si verifica che tale definizione <u>non</u> dipende dal rappresentante $\vec{AB}$.

Si può dimostrare che le operazioni di somma e moltiplicazione per un numero reale godono delle seguenti proprietà:

* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
* $(-1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moltiplicazione per} \\ \text{un numero reale}}}{\cdot} \vec{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opposto di } v \\ \text{rispetto alla somma}}}{-\vec{v}}$

  questa proprietà ci dice che c'è una <u>compatibilità</u> tra le operazioni somma e di moltiplicazione per un numero reale
* $(a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma tra reali}}}{+} b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma tra vettori liberi}}}{+} b \cdot \vec{v}$
* $a \cdot (\vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma tra vettori liberi}}}{+} \vec{w}) = a \cdot \vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma tra vettori liberi}}}{+} a \cdot \vec{w}$