Def: sia V un insieme non vuoto, ovvero $V \neq \emptyset$; l'insieme V si dice <u>spazio vettoriale</u> su $\mathbb{R}$ se sono definite due operazioni, una somma tra elementi di V, che denotiamo con $+$, e una moltiplicazione di un numero reale con un elemento di V, che denotiamo con $\cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

(V_1) (proprietà associativa di $+$)

per ogni $u, v, w \in V$ vale che

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

(V_2) (proprietà commutativa di $+$)

per ogni $u, v \in V$ vale che

$$u+v = v+u$$

(V_3) (esistenza dell'elemento nullo)

esiste un elemento di V, che denotiamo con 0, tale che, per ogni $v \in V$

$$0+v = v+0 = v$$

(attenzione: 0 <u>non</u> è un numero! ma semplicemente un elemento di V che si comporta come lo zero dei numeri)

(V_4) (esistenza dell'elemento opposto)

per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che

$$v+w = w+v = 0$$

tale elemento w si denota con $-v$ e si chiama <u>opposto</u> di v; per semplicità, se $u, v \in V$, denotiamo la somma $u+(-v)$ con $u-v$.

(V_5) (distributività di $\cdot$ rispetto a $+$)

per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per $u, v \in V$ vale che

$$a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$$

(V_6) (distributività di $\cdot$ rispetto alla somma in $\mathbb{R}$)

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$ vale che

$$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

somma in $\mathbb{R}$ — moltiplicazione per un reale — somma in V

moltiplicazioni per un reale

(V_7) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$ vale che

$$(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$$

moltiplicazione in $\mathbb{R}$ — moltiplicazione per un reale — moltiplicazione per un reale

(V_8) per ogni $v \in V$ vale che

$$1 \cdot v = v$$

gli elementi di V sono detti <u>vettori</u>; in questo contesto, i numeri reali sono detti <u>scalari</u>; in questo senso, $\cdot$ è detta <u>moltiplicazione per uno scalare</u>.

<u>Esempio</u>: l'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi con la somma e la moltiplicazione per un numero reale è uno spazio vettoriale.

<u>Esempio</u>: l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con somma e moltiplicazione usuali è uno spazio vettoriale

<u>Esempio</u>: l'insieme delle coppie (ordinate) di numeri reali, denotato $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^2$, ovvero

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con le operazioni

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{\text{somma tra coppie}}{+} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

somma tra reali

somma tra reali

e

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

è uno spazio vettoriale.

<u>Prop</u>: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; allora il vettore nullo è unico (ovvero, esiste un unico vettore $0 \in V$ tale che per ogni $v \in V$ vale $0+v = v+0 = v$)

Dim: al fine di dimostrare la tesi, supponiamo che esistano due vettori $0, 0' \in V$ tali che

per ogni

$$\forall v \in V \qquad 0+v = v+0 = v \qquad (*)$$

e

$$\forall v \in V \qquad 0'+v = v+0' = v \qquad (\square)$$

in $(*)$ scelgo $v = 0'$, allora

$$0 + 0' = 0'$$

in $(\square)$ scelgo $v = 0$, allora

$$0 + 0' = 0$$

quindi

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

dunque $0 = 0'$ $\square$.