# Istituzioni di Algebra e Geometria

## 2. Curve algebriche piane affini e proiettive

Le curve algebriche piane sono luoghi degli zeri di polinomi in due variabili (caso affine), oppure di polinomi omogenei in tre variabili (caso proiettivo).

Def: sia $K$ un campo, e siano $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ e $p \in \mathbb{A}^n_K$ con $p = (p_1, \dots, p_n)$; scriviamo $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha$; allora la valutazione di $f$ in $p$, denotata $f(p)$, è l'elemento di $K$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha p^\alpha \quad \text{dove } p^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

Def: sia $K$ un campo e sia $f \in K[x_1, \dots, x_n]$; si definisce il luogo degli zeri di $f$ in $\mathbb{A}^n_K$ come

$$Z(f) := \{ p \in \mathbb{A}^n_K \ : \ f(p) = 0 \}$$

Nel nostro corso ci concentreremo su polinomi bivariati nel caso affine: otteniamo dunque la nozione di curva algebrica piana affine.

Def: sia $K$ un campo, allora una curva algebrica piana affine è una coppia $C = (Z(f), f)$ dove $f \in K[x, y]$ è un polino=

mio non costante.

Oss: una curva algebrica piana affine non è univocamente determinata dal luogo degli zeri, dal momento che quest'ultimo può coincidere per polinomi diversi: ad esempio, abbiamo che

$$Z(x-y) = Z((x-y)^2)$$

nel primo caso, per $C = (Z(x-y), x-y)$ parliamo di <u>retta</u>, mentre nel secondo caso, per $C = (Z((x-y)^2), (x-y)^2)$ parliamo di <u>retta doppia</u>.

Le curve algebriche piane affini sono quindi una generalizzazione dei concetti di retta e conica.

Def: sia $C = (Z(f), f)$ una curva algebrica piana affine, allora si definisce il grado di $C$ come il grado di $f$.

Prop: sia $K$ un campo e sia $f \in K[x,y]$; se $f = f_1 \cdot f_2$, allora

$$Z(f) = Z(f_1) \cup Z(f_2)$$

Dim: sia $p \in A^2_K$; la tesi segue dal fatto che

$$f(p) = 0 \iff f_1(p) = 0 \text{ oppure } f_2(p) = 0$$

Def: sia $K$ un campo e sia $f \in K[x,y]$; allora la curva

$$C = (Z(f), f)$$

si dice <u>irriducibile</u> (rispettivamente <u>riducibile</u>) se il polinomio $f$ è irriducibile (rispettivamente, riducibile) in $K[x,y]$.

Notiamo quindi che la proprietà di essere irriducibile o meno dipende dal campo: se consideriamo $f \in \mathbb{Q}[x,y]$, $f = x^2+y^2$, allora la curva $C=(Z(f),f)$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ è irriducibile, mentre se pensiamo il medesimo polinomio come elemento di $\mathbb{C}[x,y]$, allora la curva che otteniamo è riducibile, visto che $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$.

<u>Def</u>: sia $K$ un campo, sia $f \in K[x,y]$ e sia

$$f = f_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{\mu_r}$$

la sua decomposizione in fattori irriducibili; le curve

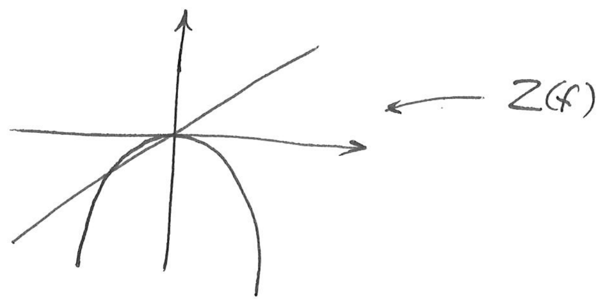
$$C_i := (Z(f_i), f_i)$$

si dicono le <u>componenti irriducibili</u> di $C=(Z(f),f)$, e si dice che $C_i$ ha <u>molteplicità</u> $\mu_i$ in $C$.

<u>Oss</u>, se $C$ è una curva algebrica piana affine e $C_1, \ldots, C_r$ sono le sue componenti irriducibili, allora vale che ciascuna $C_i$ è una curva irriducibile, e il luogo degli zeri di $C$ è l'unione dei luoghi degli zeri di $C_1, \ldots, C_r$

Esempio: consideriamo $f \in \mathbb{R}[x, y]$ con $f = f_1^2 \cdot f_2$ dove

$$f_1 = x - y \quad , \quad f_2 = x^2 + y$$




allora $C_1 = (Z(x-y), x-y)$ è una componente di $C = (Z(f), f)$ di molteplicità 2, mentre $C_2 = (Z(x^2+y), x^2+y)$ è una componente di $C$ di molteplicità 1.

Def: sia $K$ un campo, sia $f \in K[x, y]$ e sia $f = f_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{\mu_r}$ la sua scomposizione in fattori irriducibili; se $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 1$, allora $f$ si dice ridotto e anche $C = (Z(f), f)$ si dice una curva algebrica piana affine ridotta.

Oss: può accadere che $Z(f) = \emptyset$; infatti, consideriamo

$$f \in \mathbb{R}[x, y], \qquad f := x^2 + y^2 + 1$$

ora, vale che $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$, dunque $Z(f) = \emptyset$

Oss: può accadere che $Z(f)$ sia costituito da un unico punto; infatti, consideriamo

$$f \in \mathbb{R}[x, y], \qquad f := x^2 + y^2$$

ora, vale che $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$ in $\mathbb{R}$, e dunque abbiamo che $Z(f) = \{(0,0)\}$

Oss: può accadere che $Z(f) = \mathbb{A}^2_K$; infatti, consideriamo

$$f \in \mathbb{Z}_2[x,y] \qquad f := x^2 + y^2 + x + y$$

si verifica che $\forall p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}_2}$ vale che $f(p) = 0$.

Prop: sia $K$ un campo algebricamente chiuso, sia $f \in K[x,y]$ non costante; allora $Z(f)$ ha cardinalità infinita.

Dim: per esercizio (suggerimento: $K$ algebricamente chiuso $\Rightarrow$ $K$ infinito, a questo punto è sufficiente fissare un valore per $y$ e risolvere per $x$)

Le nozioni che abbiamo finora definito si possono generalizzare a dimensione arbitraria, ma non ce ne occuperemo in questo corso.

Def: sia $K$ un campo, sia $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, allora la coppia $(Z(f), f)$ è detta una ipersuperficie affine di $\mathbb{A}^n_K$; le ipersuperfici di grado 1 sono dette iperpiani.

Seguendo la direzione mostrata dal programma di Erlangen, investighiamo il comportamento delle curve algebriche piane affini rispetto alle affinità.

Def: sia $\alpha : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ un'affinità e sia $f \in K[x,y]$; definiamo

$$f^\alpha := f(\alpha^{-1}(x,y))$$

dove, se $\alpha^{-1} : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ si scrive come

$$\alpha^{-1}(p) = Ap + b,$$

dove $A \in GL_2(K)$ e $b \in K^2$, allora

$$\alpha^{-1}(x,y) := A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + b$$

Prop: sia $\alpha: \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ un'affinità, sia $f \in K[x,y]$, allora

$$\alpha\big(Z(f)\big) = Z(f^\alpha)$$

Dim: $p \in \alpha\big(Z(f)\big) \Leftrightarrow \alpha^{-1}(p) \in Z(f) \Leftrightarrow f\big(\alpha^{-1}(p)\big) = 0$
$\Leftrightarrow f^\alpha(p) = 0 \Leftrightarrow p \in Z(f^\alpha)$.

Def: sia $\alpha: \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ un'affinità, sia $f \in K[x,y]$ e sia $C = (Z(f), f)$, allora la curva $C^\alpha := \big(Z(f^\alpha), f^\alpha\big)$ è detta l'<u>immagine</u> di $f$ attraverso $\alpha$; due curve algebriche piane affini si dicono <u>affine-mente equivalenti</u> se esiste un'affinità che manda una nell'altra.

Oss: l'equivalenza affine è una relazione di equivalenza.

Abbiamo già incontrato il concetto di equivalenza affine parlando della classificazione affine delle coniche, ovvero della determinazione di un rappresentante per ciascuna classe di equivalenza rispetto alle affinità nell'insieme delle coniche (ricordiamo che tale classificazione dipende dal campo). Quando il campo è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, si dimostra che il numero di classi di equivalenza è finito. Nel caso di famiglie di curve di grado maggiore la situazione cambia radicalmente: ad esempio, nel caso delle cubiche vi sono infinite classi di equivalenza.

<u>Prop</u>: il grado di una curva algebrica piana affine è invariante per affinità, ovvero un'affinità manda curve di grado $d$ in curve di grado $d$.

Dim: notiamo che $\alpha : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ è un'affinità, allora se $t = x^h \cdot y^k$ è un termine, vale che $t^\alpha$ ha il medesimo grado di $t$, da ciò segue che se $f \in K[x,y]$ con $f = \sum_{h+k=d} a_{h,k} x^h y^k$, allora $f^\alpha$ ha grado $\leq d$ (il grado non può salire, vi sono al massimo delle cancellazioni tra i coefficienti); con analogo ragionamento possiamo dimostrare che se $f^\alpha$ ha grado $e$, allora $f$ ha grado $\leq e$ (infatti possiamo pensare che $f = (f^\alpha)^{\alpha^{-1}}$), e da ciò concludiamo che $\deg f = \deg f^\alpha$.

<u>Oss</u>: se $f \in K[x,y]$, possiamo pensare a $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ come a una <u>curva</u> di <u>livello</u>: infatti $f$ dà luogo a una <u>funzione polinomiale</u> $\mathbb{A}^2_K \to K$, $p \mapsto f(p)$, e quindi in questo senso $Z(f)$ è la preimmagine di $\{0\}$ rispetto a tale funzione polinomiale.

Introduciamo ora gli analoghi proiettivi delle curve algebriche piane affini. Notiamo però una immediata differenza: se ogni polinomio dà luogo a una funzione polinomiale su $\mathbb{A}^2_K$, questo non è più vero quando consideriamo $\mathbb{P}^2_K$. Infatti, la valutazione di un polinomio in un punto con coordinate omogenee perde di senso. Consideriamo infatti ad esempio il polinomio $f \in K[x_0, x_1, x_2]$, $f = x_0 - x_1 \cdot x_2$ e il punto $p = (1:1:1)$; allora si potrebbe pensare che

$$f(p) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

ma d'altro canto $p = (2:2:2)$, e quindi otteniamo

$$f(p) = 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

Ora, possiamo notare che per definire il luogo degli zeri non è strettamente necessario definire una valutazione di un punto, quanto poter stabilire senza ambiguità se le coordinate omogenee di un punto annullino o meno il polinomio. L'esempio precedente, però, ci mostra che nemmeno questa nozione è definita per polinomi arbitrari. Ciò che possiamo fare è restringerci alla sottoclasse dei polinomi omogenei. Ora, ricordiamo che se $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ è omogeneo di grado $d$ e $\lambda \in K$, allora per l'identità di Eulero vale che

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d F(x_0, x_1, x_2)$$

il che significa che se $p \in \mathbb{P}^2_K$ e vale che

$$p = (p_0 : p_1 : p_2) = (q_0 : q_1 : q_2)$$

allora esiste $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tale che $q_i = \lambda p_i$ per ogni $i \in \{0,1,2\}$;

in definitiva quindi

$$F(q_0, q_1, q_2) = \lambda^d F(p_0, p_1, p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( F(q_0, q_1, q_2) = 0 \Leftrightarrow F(p_0, p_1, p_2) = 0 \right)$$

Ciò mostra che l'insieme degli zeri proiettivi di un polinomio omogeneo è ben definito.

<u>Def</u>: sia $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio omogeneo; definiamo il <u>luogo degli zeri</u> di $F$ in $\mathbb{P}^2_K$, denotato $Z_p(F)$, come

$$Z_p(F) := \{ p \in \mathbb{P}^2_K : F(p) = 0 \}$$

<u>Def</u>: sia $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio omogeneo non costante; definiamo una curva algebrica proiettiva data da $F$ come la coppia

$$(Z_p(F), F)$$

Per curve algebriche piane proiettive si possono definire le medesime nozioni di grado e di componenti irriducibili come nel caso affine.

Consideriamo ora la seguente questione: data una curva $C$ in $\mathbb{A}^2_K$, e considerata $j_0 : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$, è possibile determinare un polinomio omogeneo $F$ tale che se $C = (Z(f), f)$, allora $j_0(Z(f)) \subseteq Z_p(F)$?

Analogamente data una curva $C$ in $\mathbb{P}^2_K$, ovvero $C = (Z_p(F), F)$, è possibile determinare un polinomio $f$ tale che $Z(f) = j_0^{-1}(Z_p(F) \cap U_0)$?

Possiamo ottenere questi due risultati tramite i processi di omogeneizzazione e deomogeneizzazione.

**Def.** definiamo la mappa seguente:

$$h : K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[x_0, \dots, x_n]$$
$$f \longmapsto x_0^{\deg(f)} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

La funzione $h$ è detta funzione di omogeneizzazione, e il polinomio $h(f)$, anche denotato $hf$, è detto l'omogeneizzato di $f$ rispetto a $x_0$.

**Def.** definiamo la mappa seguente:

$$a : K[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow K[x_1, \dots, x_n]$$
$$f \longmapsto f(1, x_1, \dots, x_n)$$

La funzione $a$ è detta funzione di de-omogeneizzazione, e il polinomio $a(f)$, anche denotato $af$, è detto il de-omogeneizzato di $f$ rispetto a $x_0$.

**Prop.** $\forall f \in K[x_1, \dots, x_n]$ vale che $a(h(f)) = f$.

Dim: segue immediatamente dalle definizioni.

Prop: $\forall F \in K[x_0, \dots, x_n]$, $F$ omogeneo vale che
$$F = x_0^k \cdot h(a(F)) \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dim: esercizio.

Esempio: sia $f = xy - 1$ con $f \in \mathbb{Q}[x, y]$; allora $\deg(f) = 2$ e vale
$$hf = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) =$$
$$= x_0^2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} - 1\right)$$
$$= x_1 \cdot x_2 - x_0^2$$

Oss: $hf$ è sempre omogeneo dello stesso grado di $f$

Prop: sia $f \in K[x, y]$ un polinomio non costante; allora
$$j_0(Z(f)) = Z_p(hf) \cap U_0$$

Dim: "$\subseteq$" sia $Q \in j_0(Z(f))$, allora $Q = (1 : q_1 : q_2)$ dove $(q_1, q_2) \in Z(f)$; per costruzione allora $Q \in U_0$; inoltre
$$(hf)(Q) = \left(x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)\right)(Q) =$$
$$= f(q_1, q_2) = 0$$
quindi $Q \in Z_p(hf)$

"$\supseteq$" sia $Q \in Z_p(hf) \cap U_0$, allora si può scrivere $Q = (1 : q_1 : q_2)$ e vale che $(hf)(Q) = 0$, ovvero $f(q_1, q_2) = 0$, ovvero vale che $(q_1, q_2) \in Z(f)$, e quindi $Q \in j_0(Z(f))$.

Def: sia $f \in K[x, y]$ un polinomio non costante e sia $C = (Z(f), f)$; allora la curva $\overline{C} = (Z_p(hf), hf)$ è detta la chiusura proiettiva della curva $C$.

<u>Prop</u>. sia $F \in K[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio omogeneo non costante; allora

$$j_0^{-1}(Z_p(F) \cap U_0) = Z(aF)$$

Dim: analoga alla dimostrazione precedente, per esercizio.

Tutto ciò che abbiamo detto riguardo alla omogeneizzazione e alla deomogeneizzazione può essere ripetuto sostituendo l'indice "0" delle variabili con un qualsiasi altro indice.