<u>Teore</u> (del confronto) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$,

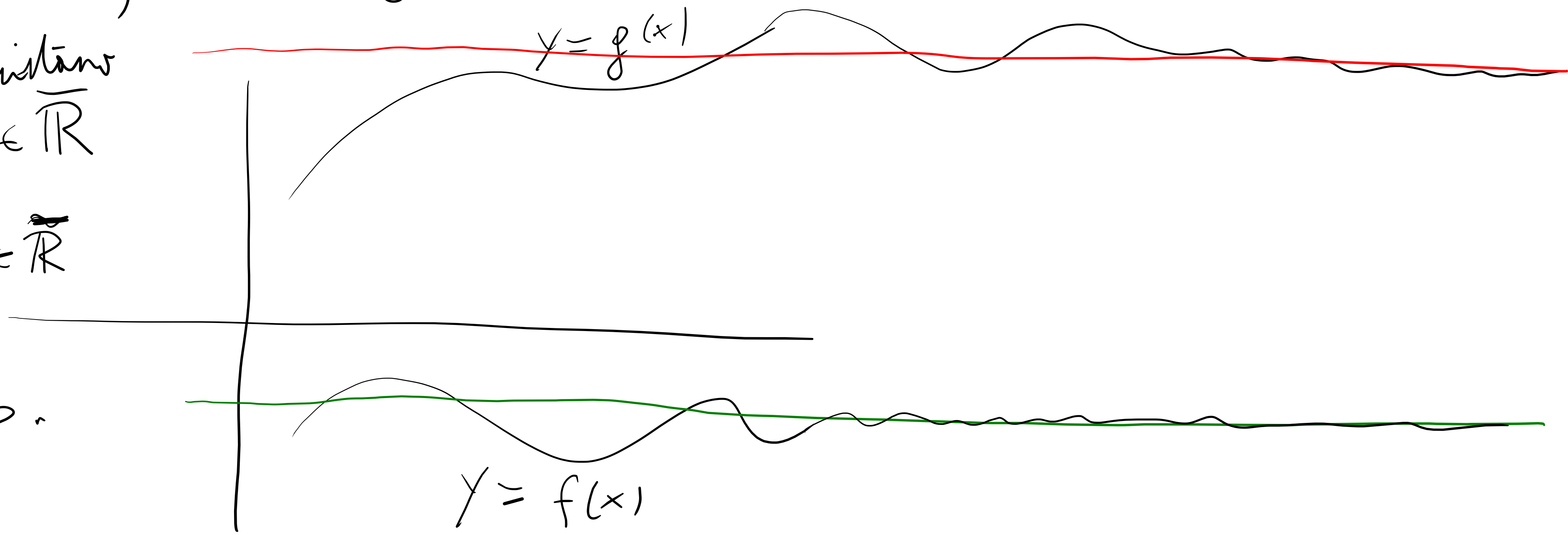
$f, g : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in X$

e supponiamo esistano

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $a \leq b$.

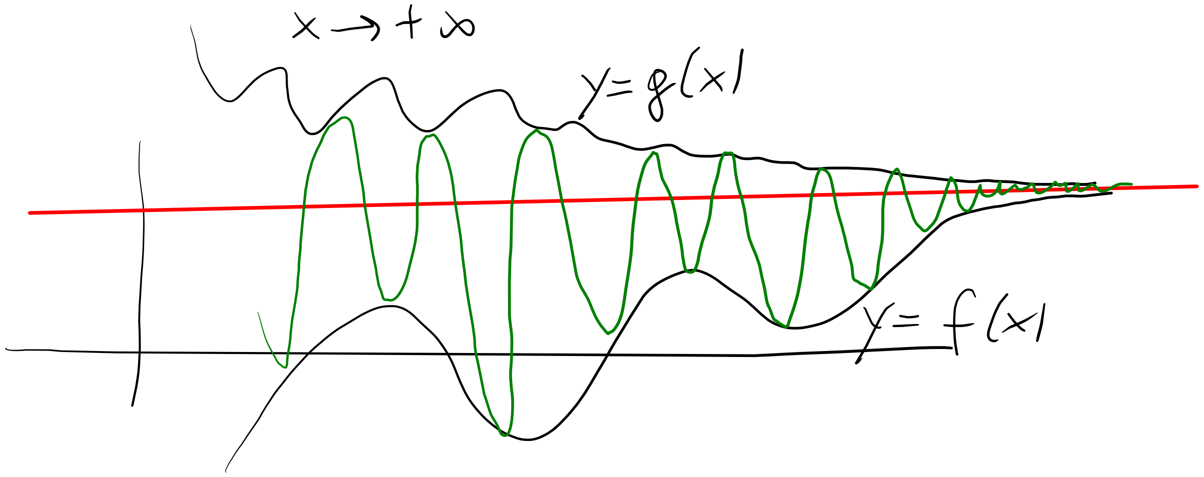


Teor (Dei Carabinieri) Sia X come sopra e siano $f, h, g : X \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \quad \text{e con}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ Allora}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = L.$$



Corollario Se ho solo due funzioni, ad esempio

$$f(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in X$$

con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

oppure $h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$

con $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

Dim (teor carabinieri: solo il caso $L\in\mathbb{R}$)

$f(x)\le h(x)\le g(x) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ significa

$\forall\varepsilon>0\ \exists M_\varepsilon^{(1)}$ t.c. $x>M_\varepsilon^{(1)}$ e $x\in X \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\boxed{L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=L$ significa

$\forall\varepsilon>0\ \exists M_\varepsilon^{(2)}$ t.c. $x>M_\varepsilon^{(2)}$ e $x\in X \Rightarrow \boxed{L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon}$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} h(x)=L$ cioè

$\forall\varepsilon>0\ \exists \boxed{M_\varepsilon}$ t.c. $x>M_\varepsilon$ e $x\in X \Rightarrow L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon.$ $(*)$

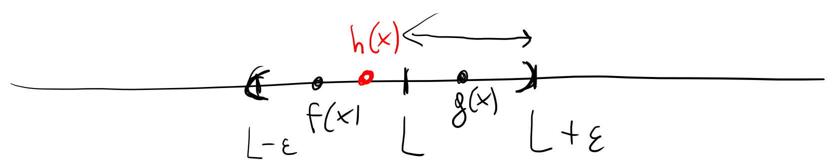
Definiamo

$M_\varepsilon=\max\{M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)}\}$ notiamo

$x>M_\varepsilon \Rightarrow x>M_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$

$x>M_\varepsilon \Rightarrow x>M_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$

Se



Dal fatto che $f(x)\le h(x)\le g(x) \quad \forall x\in X$

segue che questo in particolare è vero se $x>M_\varepsilon$

Ma allora se $x>M_\varepsilon$ e $x\in X$ ho

$L-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<L+\varepsilon$

cioè $x>M_\varepsilon$ e $x\in X \Rightarrow L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$

$\Updownarrow$

$|h(x)-L|<\varepsilon$

Abbiamo dimostrato $(*)$

cioè $\lim_{x\to+\infty} h(x)=L.$

Sia $b > 1$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

Teorema $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$

Dim Usiamo Bernoulli scrivendo

$$b = 1 + a \quad \text{dove} \quad a > 0$$

$$\left(b > 1 \iff \cancel{1} + a > \cancel{1} \iff a > 0 \right)$$

Da Bernoulli segue

$$b^n = (1+a)^n \geq 1 + n a \to +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (1+na) = \lim_{n\to+\infty} 1 + \lim_{n\to+\infty} na$$

$$= 1 + a \lim_{n\to+\infty} n$$

$$= 1 + a \, (+\infty)$$

$$= 1 + (+\infty) = +\infty$$

Per i Confr.

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty \qquad b>1$$

$$\cancel{b = 1+a} \qquad a>0$$

$$\cancel{\frac{b^n}{n}} = \cancel{\frac{(1+a)^n}{n}}$$

$$b>1 \iff \sqrt{b} > 1$$

se scrivo $\sqrt{b} = 1+a$ allora

$$a>0, \quad b = (\sqrt{b})^2$$

$$\frac{b^n}{n} = \frac{((\sqrt{b})^2)^n}{n} = \frac{((\sqrt{b})^n)^2}{n} =$$

$$= \frac{((1+a)^n)^2}{n}$$

Per Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na > 0$

$$\Updownarrow$$

$$((1+a)^n)^2 \geq (1+na)^2$$

$$\geq \frac{(1+na)^2}{n}$$

Abbiamo dimostrato che per $a = \sqrt{b}-1$ abbiamo

$$\frac{b^n}{n} \geq \frac{(1+na)^2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{2}} a^2}{\cancel{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a^2 n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty \qquad \text{se } b>1$$

Infatti abbiamo anche

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^2} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^{100}} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^{100}} = +\infty \qquad \text{se } b > 1$$

$$b > 1 \iff \sqrt[101]{b} > 1$$

Scrivo

$$\sqrt[101]{b} = 1 + a \qquad \text{con } a > 0$$

$$\frac{b^n}{n^{100}} = \frac{\left(\left(\sqrt[101]{b}\right)^{101}\right)^n}{n^{100}} = \frac{\left(\left(\sqrt[101]{b}\right)^{n}\right)^{101}}{n^{100}}$$

$$= \frac{\left((1+a)^n\right)^{101}}{n^{100}} \geq \frac{(1+na)^{101}}{n^{100}}$$

Bernoulli $\quad (1+a)^n \geq 1 + na > 0$

$$\Updownarrow \; 101$$

$$\left((1+a)^n\right)^{101} \geq (1+na)^{101}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(1+na)^{101}}{n^{100}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\cancel{101}\,1} a^{101}}{\cancel{n^{100}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n\, a^{101} = +\infty$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^{100}} = +\infty$$

Esercizio. Dimostrate che $\forall\, N \in \mathbb{N}$ e se $b > 1$ si ha $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty$

2 Ottobre

Def. Dato un insieme X denoto con $\text{card}\, X$ = il numero degli elementi di X.

Esercizio 1) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\text{card}\, X < +\infty$. Dimostrare che esistono $\min X$ e $\max X$.

2) Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Dimostrare che esiste $\min X$.

Svolgiamo: Dati $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ dimostriamo che

$$\boxed{\inf X \le \inf Y} \le \sup Y \le \sup X$$

Dim. Dimostriamo che $\inf X \le \inf Y$. Ricordiamo che

$$\inf X \le x \quad \forall x \in X.$$

Siccome $Y \subseteq X$ da ciò deriva che

$$\inf X \le y \quad \forall y \in Y.$$

Dalla 2° proprietà di $\inf Y$ concludiamo che $\inf X \le \inf Y$.

Ora dimostriamo $\inf Y \le \sup Y$. Questo segue dalla 1° proprietà di inf e 1 sup

$$\inf Y \le y \quad \forall y \in Y$$
$$y \le \sup Y \quad ''$$

Pertanto preso $y \in Y$ ho

$$\inf Y \le y \le \sup Y \Rightarrow \inf Y \le \sup Y$$

Infine dimostriamo $\sup Y \le \sup X$.

$\sup X \ge x \quad \forall x \in X$. Da $Y \subseteq X$ segue che

$$\sup X \ge y \quad \forall y \in Y.$$

Per la 2° proprietà del $\sup Y$ segue $\sup Y \le \sup X$. □

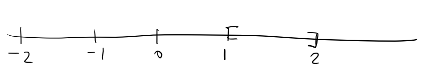
Esercizio Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ sia

$$-X = \{-x : x \in X\}$$

Dimostrare che

$$\inf X = -\sup(-X)$$
$$\sup X = -\inf(-X).$$

Esempio $X = [1,2]$, $\quad -X = [-2,-1]$



$\inf(-X) = -2 \qquad \sup X = 2$

$\sup(-X) = -1 \qquad \inf X = 1$

Teor Sia $b > 0$, Si ha $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

$\left(b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b} \right)$

Dim Per $b = 1$ $\quad b^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall n$

e l'enunciato è vero.

Sia ora $b > 1 \iff \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} > 1$

cioè se pongo $a_n = b^{\frac{1}{n}} - 1$ ho $a_n > 0 \ \forall n$.

$\{ b^{\frac{1}{n}} \} = \{ 1 + a_n \}$

$$\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$b = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + a_n)^n \geq 1 + n\, a_n \quad \forall n$$

$$b \geq 1 + n\, a_n \qquad \forall n$$

$$\Updownarrow$$

$$n\, a_n \leq b - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < a_n \leq \frac{b-1}{n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow n \to +\infty$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Per i Carab. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (b > 1)$$

$b < 1 \qquad \frac{1}{b} > 1$

$0 < b < 1$

$\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} =$

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \right)$$

$b = \dfrac{1}{\frac{1}{b}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{b}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1}$$

$$= 1$$