Lezione 6 - 2/10/2025

A con n elementi, $0 \leq k \leq n$ $(k \in \mathbb{N})$

¿ quanti sono i sottoinsiemi di A con k elementi ?

(trad. "Combinazioni di n oggetti a k a k")

indico $C_{n,k}$ l'insieme dei sottoinsiemi con k el.

$$|C_{n,k}| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \left(\begin{matrix}\text{convenzione}\\ 0! = 1\end{matrix}\right)$$

si legge "n sopra k"
si chiama anche "coefficiente binomiale"

Proprietà dei coefficienti binomiali

1) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

verificarlo usando la formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$\parallel$$
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))}_{k}!}$$

lo potevo capire pensando che gli insiemi con k elementi sono in biezione con i loro complementari che hanno $n-k$ elementi

3) sia $0 < k < n$.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

esercizio verificare usando la formula

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$
$$\parallel$$
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ho n elementi
ne voglio scegliere k
ho un elemento particolare $*$

i sottoinsiemi con k elementi sono di 2 tipi

- contengono $*$ $\longrightarrow$ $\binom{n-1}{k-1}$
- non contengono $*$ —— sono $\binom{n-1}{k}$

si fa la somma e si conclude

$0 \rightarrow$ $\binom{0}{0}$

$1 \rightarrow$ $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$2 \rightarrow$ $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$3 \rightarrow$ $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$4 \rightarrow$ $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$5 \rightarrow$ $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$6 \rightarrow$ $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

$7 \rightarrow$ $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1   4
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\uparrow$ ... $\uparrow$

$\binom{8}{0}\binom{8}{1}\binom{8}{2}\binom{8}{3}\binom{8}{4}\binom{8}{5}\binom{8}{6}\binom{8}{7}\binom{8}{8}$

$$70 = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{2} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 70$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA (TRIANGOLO DI PASCAL)

$1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$

$\binom{n}{k}$ è un "coefficiente binomiale" perchè vale il seguente

Teorema (del binomio)

siano $a, b \in \mathbb{R}$ (vale anche x $a, b \in \mathbb{C}$)

sia $n \geq 1$

allora $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$ $\Big\}$ $P(n)$

coefficienti

es. $(a+b)^8 = \binom{8}{0} a^8 + \binom{8}{1} a^7 b + \binom{8}{2} a^6 b^2 + \binom{8}{3} a^5 b^3 + \binom{8}{4} a^4 b^4 + \binom{8}{5} a^3 b^5 + \binom{8}{6} a^2 b^6 + \binom{8}{7} a b^7 + \binom{8}{8} b^8$

$\| \quad (a+b)(a+b) \dots (a+b)$

$= a^8 + 8a^7 b + 28 a^6 b^2 + 56 a^5 b^3 + 70 a^4 b^4 + 56 a^3 b^5 + 28 a^2 b^6 + 8 a b^7 + b^8$

dim. proviamo per induzione su n

¿ $P(1)$ vera? $(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j} b^j$

$= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$

$= 1 \cdot a^1 \, 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a+b$

vera

¿ $\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$P(n)$: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$

$\Downarrow$

moltiplico per $(a+b)$ da tutte e 2 le parti

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \right)$$

$\Downarrow$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1}} + b^{n+1}$$

introduco un nuovo parametro $h = j+1$, $j = h-1$

$\|$

$$\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h$$

lo uniformo mettendo j al posto di h

$$= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}}_{= \binom{n+1}{j}} \Big) a^{n+1-j} b^j + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{(n+1)-j} b^j \quad : P(n+1)$$

OK

Provare che

$0+1+8+27+\dots+n^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

lo provo usando l'induzione

1° $P(0)$ è vera? $\quad 0 = \left(\frac{0\cdot 1}{2}\right)^2 = 0$ vera

2° $\forall n,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$P(n):\quad 0+1+8+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\Downarrow$ sommo da tutte e 2 le parti $(n+1)^3$

$0+1+8+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

$\Downarrow$

$0+1+\dots+n^3+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n+1\right)$

$0+1+\dots+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$ $\quad (n+2)^2$

$0+1+\dots+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

$P(n+1)$ OK

Provare che

Es. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$

1
1 - 1
1 - 2 + 1
1 - 3 + 3 - 1
1 - 4 + 6 - 4 + 1

$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cancel{1^{n-j}\,1^{j}}$

Provare che

Es $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0$ $\qquad (-1)^j$

$\sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_k$

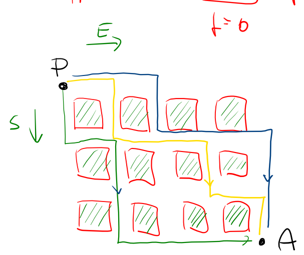
$\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k$

$0 = +1-1 = (1+(-1))$

$0 = (1+(-1))^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cancel{1^{n-j}}(-1)^j$

abbastanza difficile $\quad \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

Es

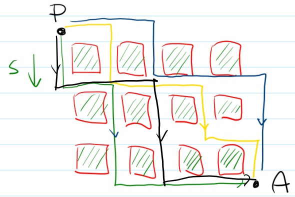


mi sposto o verso E
o verso S

quanti sono i possibili percorsi?

in totale devo fare 7 passi

ES.



mi sposto o verso E
o verso S
quanti sono i possibili percorsi ?

in totale devo fare 7 passi

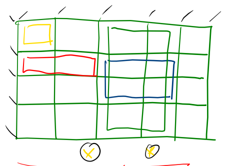
S	E	E	S	S	E	E

		S	S			S

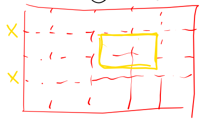
scegliere 3 di 7
quindi $\binom{7}{3}$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{3\cdot2}\cdot\cancel{4!}} = 35$$

ES.



quanti rettangoli ho disegnato ?



$\binom{5}{2} = 10$

$\binom{6}{2} = \frac{\cancel{6}^{3}\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{4!}} = 15$

scelte lati verticali

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2} = 150$$

scelte per i lati orizzontali

Es. 10 caselle da colorare con 3 colori

$$3\cdot3\cdots\cdot3 = 3^{10}$$

Es. 10 caselle da colorare con 13 colori
tutti diversi

$$\underbrace{13\cdot12\cdot11\cdots\cdot4}_{10\text{ fattori}} = \frac{13!}{3!}$$

$13 \times 22 = 26$, $26 -$, 286

Es. devo scegliere 10 colori da 13
in quanti modi ?

$$\binom{13}{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = \binom{13}{3} = \frac{13\cdot\cancel{12}^{2}\cdot11}{\cancel{3!}} = 13\cdot2\cdot11 = 286$$

Es. 4 carte da un mazzo di 40

$$\binom{40}{4}$$

Es. lancio 5 volte una moneta
quante sequenze di Testa o Croce ?

$\boxed{2^5}$

T o C	T o C	T o C	T o C	T o C

T	C	C	T	T

Es. estraggo 4 carte da 40
quante est. con almeno un re

o si calcola – esattamente 1
" 2
" 3
" 4
e si somma

Es. estraggo 4 carte da 40
quante estr. con almeno un re

o si calcola esattamente 1 +
〃 2
〃 3
〃 4 e si somma

o si calcolano tutte e si tolgono quelle
senza re

$$\binom{40}{4} - \binom{36}{4}$$

esattamente 3 re $\binom{4}{3}\binom{36}{1}$

scelta dei re

scelta del non re