Esempio Dato $a > 0$, allora

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

(1) (2)

Risposta

Si tratta di dimostrare che (1) $\Rightarrow$ (2)

e (2) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2)

Supponiamo che $|x| < a$ per un certo x.

Ci sono due casi. Caso i) $x \geq 0$

ii) $x < 0$

Caso i)

Se $x \geq 0$ allora $|x| = x$ e $|x| < a \Rightarrow x < a$.

$$(-a <) \boxed{0 \leq x < a} \Rightarrow -a < x < a$$

Caso ii)

Se $x < 0$ allora $|x| = -x$ e $|x| < a \Rightarrow -x < a$

$x < 0 \Rightarrow -x > 0$ Quindi $\boxed{0 < -x < a}$ $(\cdot(-1))$

$$0 > x > -a$$

$$\boxed{-a < x < 0} \; (< a)$$

$$\Downarrow$$

$$-a < x < a$$

Abbiamo dimostrato

Ora dimostriamo che $(2) \Rightarrow (1)$

Per ipotesi ho $-a < x < a$.

Due casi

i) $x \geq 0$ $\quad (x = |x|)$

ii) $x < 0$ $\quad (x = -|x|$

Nel caso i) $x \geq 0$ ottengo

$0 \leq x < a$. Inoltre $x = |x|$ quindi

$\Downarrow$

$|x| < a$

(ii) $x < 0$ $\quad -a < x < a$

$x = -|x|$

$-a < x < 0$

$\Downarrow$

$\boxed{-a < -|x|} < 0 \Longrightarrow a > |x|$

moltiplico per -1

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad L \in \mathbb{R}$ $\quad \sup X = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\quad \boxed{A \subseteq \mathbb{R}_+}$ $\quad \inf A = 0$

$\mathbb{R}_+ = (0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Sono equivalenti

1) $\forall \varepsilon > 0$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)$ $\exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

2) $\forall a \in A$ $\exists N_a$ t.c. $x > N_a$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < a$

Risposta

Da dimostrare 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

1) $\Rightarrow$ 2)

se è vera la 1) e se considero $\varepsilon \in A$ risulta anche $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, quindi per ε vale la 1) e se pongo $N_\varepsilon := M_\varepsilon$ risulta vera anche la 2).

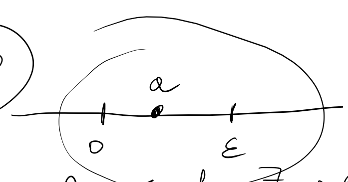
Ora

2) $\Rightarrow$ 1)

Voglio dimostrare

1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

~~Scegliamo a~~ Sia $\varepsilon > 0$



$A \subseteq \mathbb{R}_+$
$\inf A = 0$ } Queste due insieme implicano che $\exists a \in A$ t.c. $0 < a < \varepsilon$

(allora $a > 0$ $\forall a \in A$ perché $A \subseteq \mathbb{R}_+$;
$\boxed{\exists\, a \in A \text{ t.c. } a < \varepsilon}$ perché se fosse ~~falso~~
allora $a \geq \varepsilon$ $\forall a \in A \Rightarrow 0 \geq \varepsilon > 0$ assurdo)

so che $\exists N_a$ t.c. $x > N_a$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < a < \varepsilon$

Allora se pongo $M_\varepsilon = N_a$ risulta vero che

$x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Ho dimostrato che vale la 1.

$A \neq \emptyset$

$A \subseteq \mathbb{R}_+$ con $\inf A = 0$

E' possibile che $\operatorname{card} A < +\infty$?

$\operatorname{card} A < +\infty \implies \exists \min A$

quindi se $\exists \min A$ ~~e da~~ ho

$$\min A = \inf A = 0$$

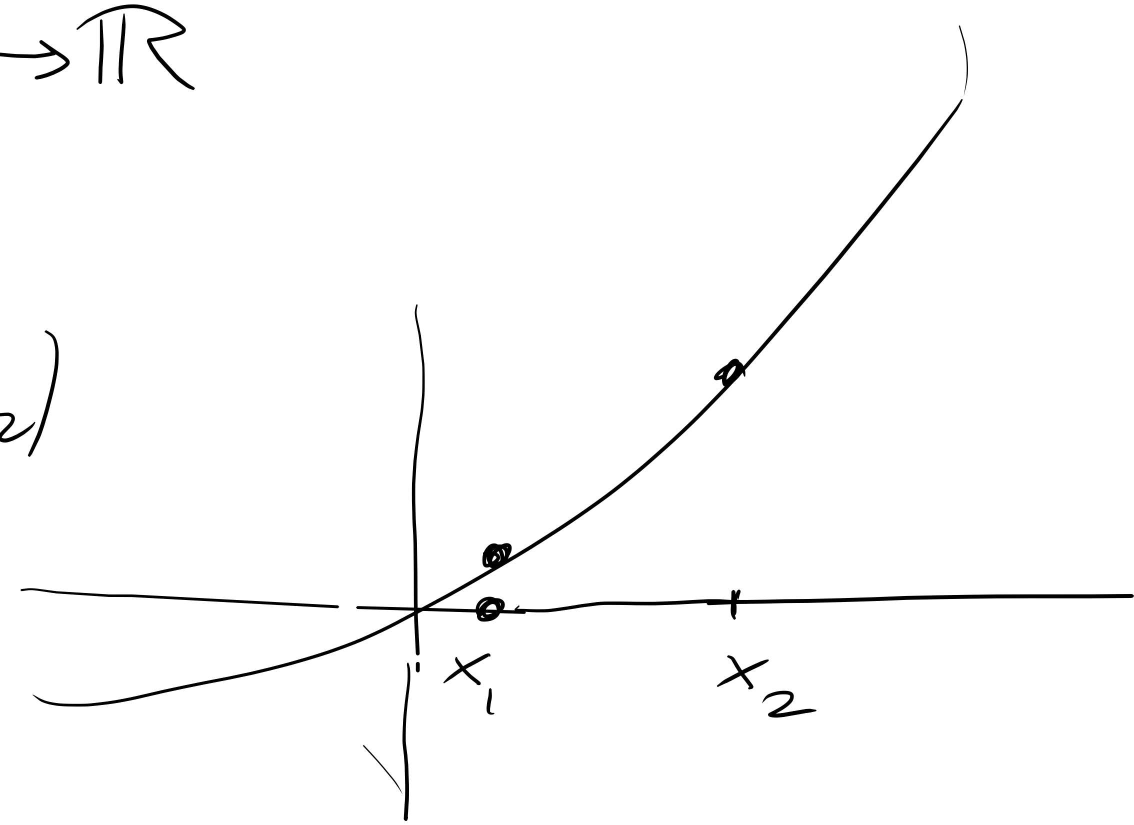
ma so che $0 \notin A$.

Def (funzioni monotone)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f: X \to \mathbb{R}$

a) f si dice (strettamente) crescente se

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2)$$



b) f si dice (strettamente) decrescente se

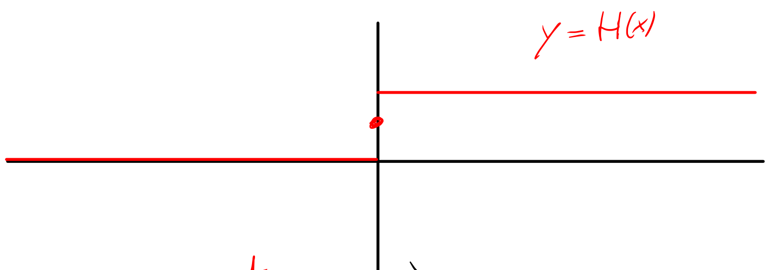
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \overset{(>)}{\geq} f(x_2)$$

c) $f: X \to \mathbb{R}$ si dice (strettamente) monotona se è del tipo a) o se è del tipo b)

Esempi di funzioni

1) funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$H(x)$ è crescente, cioè

$$x_1 < x_2 \Rightarrow H(x_1) \leq H(x_2)$$

Sia $x_1 < x_2$. Se $0 < x_1 < x_2$ allora ho $H(x_1) = 1$, $H(x_2) = 1$ e pertanto

$$H(x_1) \leq H(x_2)$$

Se $x_1 = 0$, $x_2 > 0$

$$H(x_1) = \frac{1}{2} < 1 = H(x_2)$$

Se $x_1 < 0$ e $x_1 < x_2$ ci sono vari casi

Se $x_2 < 0$ allora $H(x_1) = 0 = H(x_2) \Rightarrow H(x_1) \leq H(x_2)$

Se $x_2 = 0$ $\quad H(x_1) = 0 < \frac{1}{2} = H(x_2)$

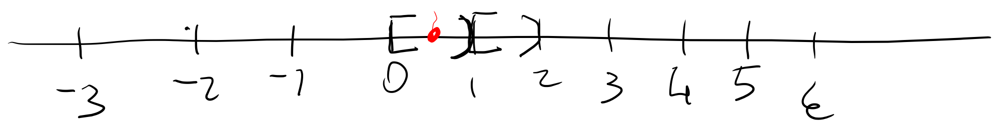
Se $x_2 > 0$ $\quad H(x_1) = 0 < 1 = H(x_2)$

Conclusione: ho dimostrato $H(x_1) \leq H(x_2)$ per ogni coppia $x_1 < x_2$.

Funzione parte intera

$$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

$$[x] \le x < [x] + 1$$



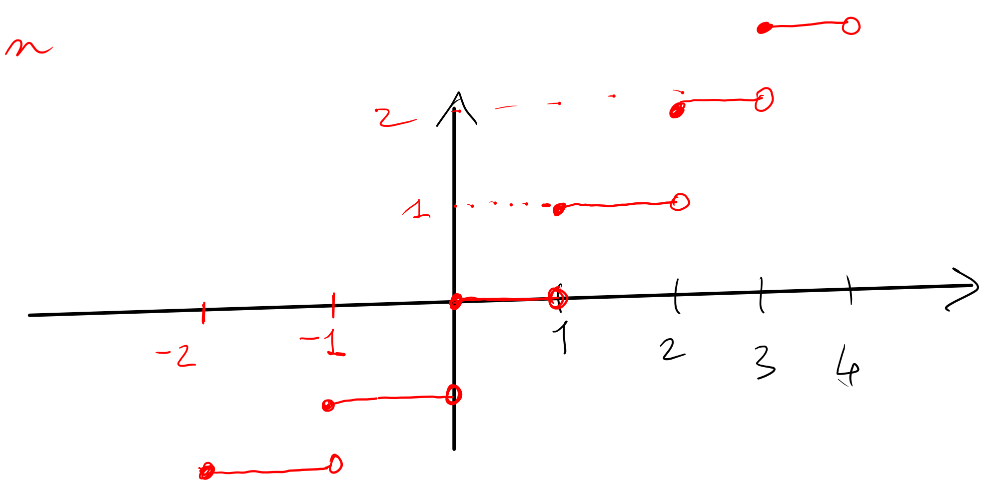
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$$

se $x \in [n, n+1)$ allora $n = [x]$

$\left[\frac{1}{2}\right]$ $\qquad \frac{1}{2} \in [0, 1) \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$\left[-\frac{1}{2}\right]$ $\qquad -\frac{1}{2} \in [-1, 0) \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$

$[n] = n$



Esercizio 1) Dimostrare che $[x]$ è crescente.

2) Verificare se è una funzione pari, dispari, o né pari né dispari.