Prop.: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall v \in V$ vale che l'opposto di v è unico, ovvero esiste un unico vettore $w \in V$ tale che

$$w + v = v + w = 0.$$

Dim: supponiamo che per un certo $v \in V$ valga che esisto $w, w' \in V$ tali che

$$w + v = v + w = 0$$
$$w' + v = v + w' = 0$$

vogliamo mostrare che $w = w'$; vale che

$$w \underset{\text{proprietà dello zero}}{=} w + 0 \underset{\text{per quanto supposto}}{=} w + (v + w') \underset{\text{per la proprietà associativa di +}}{=} (w + v) + w'$$

$$\underset{\text{per quanto supposto}}{=} 0 + w' \underset{\text{proprietà dello zero}}{=} w'$$

□

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. allora $\forall v \in V$ vale che:

$$(-1) \cdot v = -v$$

Dim: dal momento che abbiamo dimostrato che per ogni $v \in V$, l'opposto di v è unico, è sufficiente dimostrare che per ogni $v \in V$, il vettore $(-1) \cdot v$ soddisfa le proprietà dell'opposto di v, e dunque è uguale all'opposto di v; mostriamo dunque che

$$\forall v \in V \quad (-1) \cdot v + v = 0$$

questo è vero, infatti

$$(-1) \cdot v + v \underset{(V_8)}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v \underset{\text{distributività di } \cdot \text{ rispetto a } +}{=} (-1 + 1) \cdot v$$

$$= 0 \cdot v$$

se fosse vero che $0 \cdot v = 0$, ovvero che $0 \cdot v$ è uguale al vettore nullo, allora la dimostrazione sarebbe conclusa; lo mostriamo nella prossima proposizione □.

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall v \in V$ vale che

$$\underset{\text{numero reale zero}}{0} \cdot v = \underset{\text{vettore nullo in } V}{0}$$

Dim: sia $v \in V$, allora vale che

$$0 \cdot v = (0 \underset{\text{somma tra reali}}{+} 0) \cdot v \underset{\text{distributività}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

qualsiasi sia $0 \cdot v$, possiamo considerare il suo opposto $-(0 \cdot v)$ e sommarlo a entrambi i membri dell'uguaglianza.

$$\underbrace{-(0 \cdot v) + 0 \cdot v}_{\text{è il vettore nullo, perché stiamo sommando un vettore con il suo opposto}} = -(0 \cdot v) + (0 \cdot v + 0 \cdot v)$$

$$= \underbrace{\left(-(0 \cdot v) + 0 \cdot v\right)}_{\text{vettore nullo}} + 0 \cdot v$$

in conclusione otteniamo

$$0 = 0 + 0 \cdot v = 0 \cdot v$$

□

Consideriamo ora $\mathbb{R}^2$ con somma $(+)$ e moltiplicazione per uno scalare $(\cdot)$ che abbiamo già introdotto, ovvero le cosiddette operazioni "componente per componente":

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^2$ con $+$ e $\cdot$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Consideriamo il sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da:

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \underset{\text{tali che}}{:} x - 3y = 0 \right\}$$

Notiamo che vale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, ovvero W contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.
Cerchiamo di capire come gli elementi di W si comportano rispetto alla somma di $\mathbb{R}^2$. Più precisamente, dati $v, w \in W$ sappiamo sicuramente che $v + w \in \mathbb{R}^2$ e ci chiediamo se $v + w \in W$.
Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ con $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.
Dato che abbiamo supposto che $v \in W$, vale che $v_1 - 3v_2 = 0$. Analogamente, da $w \in W$ segue che $w_1 - 3w_2 = 0$. Ora, vale che

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

Al fine di dimostrare che $v + w \in W$, dobbiamo verificare che valga

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

Vale che

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = (v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Pertanto $v + w \in W$.
Infine verifichiamo che $\forall v \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \cdot v \in W$.
Questo è vero: infatti se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora vale che

$$v_1 - 3v_2 = 0 \text{ perché } v \in W$$

Inoltre

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare che $\lambda \cdot v \in W$ dobbiamo mostrare che

$$(\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) = 0$$

Ora, vale che

$$(\lambda \cdot v_1) - 3(\lambda \cdot v_2) = \lambda(v_1 - 3v_2)$$
$$= \lambda \cdot 0 = 0$$

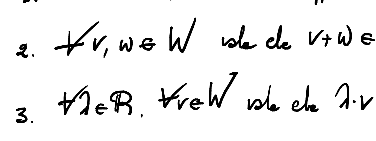
Pertanto $\lambda \cdot v \in W$.

Def: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un <u>sottospazio</u> vettoriale di V se valgono:

1. il vettore nullo di V appartiene a W (ovvero $0 \in W$)
2. $\forall v, w \in W$ vale che $v + w \in W$ ("chiusura rispetto alla somma")
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\forall v \in W$ vale che $\lambda \cdot v \in W$ ("chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare")

Esempio: se identifichiamo gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con i punti del piano

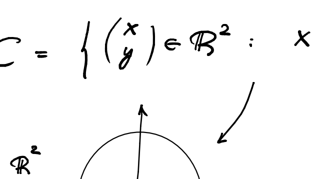
$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \{\text{punti del piano}\}$$



$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0 \right\}$

Esempio: in $\mathbb{R}^2$, consideriamo il sottoinsieme

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$



C <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché, ad esempio, vale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin C$.

Dati, in generale due sottoinsiemi A e B di un insieme X, allora vale che sia $A \cup B$ che $A \cap B$ sono dei sottoinsiemi di X.
Ora ci chiediamo, dati W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, è vero che $W_1 \cup W_2$ e $W_1 \cap W_2$ sono entrambi sottospazi vettoriali di V?

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $W_1, W_2 \subseteq V$ sottospazi vettoriali di V; allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim: ricordiamo che

$$W_1 \cap W_2 = \{ w \in V : w \in W_1 \text{ e } w \in W_2 \}$$

per dimostrare che $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di V, mostriamo che valgono le seguenti tre proprietà:

1. $0 \in W_1 \cap W_2$
2. $\forall v, w \in W_1 \cap W_2$, vale che $v + w \in W_1 \cap W_2$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall w \in W_1 \cap W_2$, vale che $\lambda \cdot w \in W_1 \cap W_2$

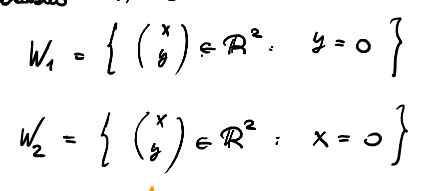
dimostriamole una a una:

1. dato che W_1 è sottospazio, allora $0 \in W_1$; dato che W_2 è sottospazio, allora $0 \in W_2$; quindi $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, quindi $0 \in W_1 \cap W_2$
2. siano $v, w \in W_1 \cap W_2$; allora $v, w \in W_1$ e $v, w \in W_2$
   dato che W_1 è sottospazio e $v, w \in W_1$, allora $v + w \in W_1$
   dato che W_2 è sottospazio e $v, w \in W_2$, allora $v + w \in W_2$
   quindi $v + w \in W_1$ e $v + w \in W_2$, ovvero $v + w \in W_1 \cap W_2$
3. sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $w \in W_1 \cap W_2$; allora $w \in W_1$ e $w \in W_2$
   dato che W_1 è sottospazio, allora $\lambda \cdot w \in W_1$
   dato che W_2 è sottospazio, allora $\lambda \cdot w \in W_2$
   pertanto $\lambda \cdot w \in W_1 \cap W_2$ □

Oss. consideriamo $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ con

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}$$



consideriamo gli elementi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; vale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1 \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cup W_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1 \cup W_2$$

consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

però $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_2$, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

pertanto concludiamo che $W_1 \cup W_2$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.