6 Ottobre

Teorema (limiti funzioni monotone)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ $\sup X = +\infty$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ con f monotona. Allora esiste

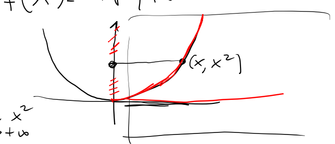
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

In particolare, per f crescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X) = \sup \{f(x) : x \in X\}$$

mentre se f è decrescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f(X) = \inf \{f(x) : x \in X\}$$

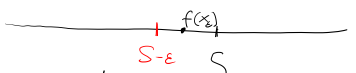


Es $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = \sup \{x^2 : x \geq 0\} = \sup [0, +\infty) = +\infty$$

Dim Supponiamo che f sia crescente.
Devo dimostrare che posto $S = \sup f(X)$ risulta $*$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$. Qui $S > -\infty$

Supponiamo qui $S \in \mathbb{R}$.



per avere $*$ Bisogna dimostrare che

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X$ $\Rightarrow S - \varepsilon \boxed{<} f(x) < S + \varepsilon$

Qui sappiamo che $f(x) \leq S \ \forall x \in X$.
$\forall \varepsilon > 0$ risulta $S - \varepsilon < S$.
Allora esiste un $x_\varepsilon \in X$ t.c.

$$S - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq S$$

Ora usiamo il fatto (non ancora utilizzato) che f è una funzione crescente.
Per $x \geq x_\varepsilon$ $x \in X$ posso dire che $S - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq S \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) \leq S$

$\forall x \geq x_\varepsilon$ $\Rightarrow |f(x) - S| < \varepsilon$

(1) è vero con $M_\varepsilon = x_\varepsilon$

Se g è decrescente il fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \inf g(X)$$

segue automaticamente dal caso delle funzioni crescenti osservando che

$f(x) := -g(x)$ è crescente, abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X) \quad - \left(Y \subseteq \mathbb{R} \quad -Y = \{-y : y \in Y\} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-1) g(x) = \sup -g(X)$$

$$-\lim_{x \to +\infty} g(x) = \sup -g(X)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\sup -g(X) = \inf g(X)$$

Teor (Numero di Neper $e = 2,718\ldots$)

1) La successione $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente con limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

2) La successione $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente con limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

Dim (parziale) Il fatto che se

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \implies \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} = e \cdot 1 = e$$

Per dimostrare che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente utilizziamo il seguente fatto relativo alle medie geometrica e aritmetica:

Def Siano $a_1, \ldots, a_n$ dei numeri reali, allora la loro media aritmetica è

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ la loro media geometrica è

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Es se $a_1 = \cdots = a_n = a > 0$

media aritmetica $= \dfrac{\overbrace{a + \cdots + a}^{n \text{ volte}}}{n} = a$

media geometrica $\sqrt[n]{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}} = \sqrt[n]{a^n} = a$

Vale la seguente disuguaglianza: Per $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ si ha

(2) $$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Usiamo (2) per dimostrare che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente

$a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ non tutti uguali

$$\sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}} < \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}$$

Scegliamo $a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ volte}} + 1}{n+1}$$

$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)+1}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente.

Chiamo $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Si vede subito che $e > 2$.

Infatti $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

per $n = 1$ $\quad e > \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Esercizio

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Abbiamo già visto il caso $n = 2$

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

Dimostrare ora che $n \Longrightarrow n+1$
$(n \geq 2)$

Assumendo $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ (P_n) dimostrare che

allora $\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + |x_{n+1}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$$

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

e P_2

Esercizio Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è t.c. $\operatorname{card} X < +\infty$

$\Rightarrow \exists \min X$ e $\max X$.

Dimostriamo per induzione su $n := \operatorname{card} X$

Nel caso $n = 1$ $\quad X = \{x\}$

$$\min X = \max X = x.$$

Assumiamo che $\left(\operatorname{card} X = n \Rightarrow \exists \min X \text{ e } \max X\right)$ (P_n)

e dimostriamo P_{n+1}

Sia $x_{n+1} \in X$. Posto $Y = X \setminus \{x_{n+1}\}$

ho che $\operatorname{card} Y = n \Rightarrow \exists \min Y$ e $\max Y$.

$\max X = ?$, $\min X = ?$

Ci sono tre casi. Se $x_{n+1} > \max Y$

$\Rightarrow \max X = x_{n+1}$ $\quad \min X = \min Y$

Se $\min Y < x_{n+1} < \max Y$

$\max X = \max Y$, $\min Y = \min X$

se $x_{n+1} < \min Y \Rightarrow \min X = x_{n+1}$

$\max X = \max Y$

Sia $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$. Allora $\exists$
$\min X$.

Sia $x_0 \in X$ e consideriamo

$$Y = \{x \in X : x \leq x_0\}$$

so che $Y \subseteq \{1, 2, \dots, x_0\}$

$\text{card}\, Y \leq x_0 < +\infty$

$\Rightarrow \exists \min Y$. $Y \subseteq X$

Si ha che $\min Y = \inf X \Rightarrow$
$\exists \min X$

Ovviamente $\inf X \leq \min Y$

Per avere l'uguaglianza devo dimostrare che

$$\min Y \leq x \quad \forall x \in X.$$

Prendiamo un $x \in X$.

1) se $x \leq x_0$ allora $x \in Y$ e quindi $\min Y \leq x$. In particolare $\underline{\min Y \leq x_0}$

2) se $x > x_0$ allora

$$x > x_0 \geq \min Y \Rightarrow x > \min Y$$

Ho appena dimostrato che $\min Y \leq x \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \exists \min X = \min Y$. $\quad Y \subseteq X$

Esercizio $[x]$ e' crescente.

Ricordiamoci $[x] \in \mathbb{Z}$ e che

$$[x] \le x < [x]+1.$$

Ora devo dimostrare che (3)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \le [x_2].$$

Dim $[x_1] \le x_1 < x_2 < [x_2]+1$ (4)

Se (3) fosse falsa esisterebbe una coppia $x_1 < x_2$ con $[x_1] > [x_2]$ (5)

$$[x_2] < [x_1] \Rightarrow [x_2]+1 \le [x_1]$$

$$[x_1] \le x_1 < x_2 < [x_2]+1 \le [x_1] \le x_1$$

$$\Rightarrow x_1 < x_1 \quad \text{assurdo}$$

$[x]$ è pari? falso per $x \in \mathbb{Z}$

cioe' ho $[-x] = [x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ovviamente no perché per $x \in \mathbb{Z}$

$$[x] = x$$
$$\ne$$
$$[-x] = -x$$

Ho per caso allora $[-x] = -[x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

e' falsa per $x = \frac{1}{2}$

Anche questo è falso.

$[\frac{1}{2}] = 0$

$[-\frac{1}{2}] = -1$