Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 2 - Richiami su valore assoluto e geometria nel piano - 06/10/2025

Valore assoluto

- $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

x è una variabile reale, quindi non ne conosciamo il valore e il segno. Il valore assoluto di un numero noto è più immediato.

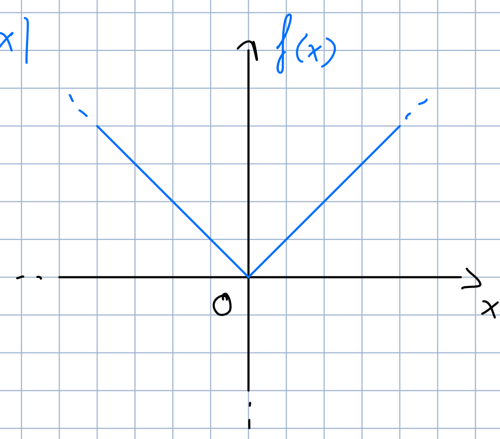
Ad esempio:

$|2| = \begin{cases} 2 & \text{se } 2 \geq 0 \\ -2 & \text{se } 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |2| = 2$ perché $2 \geq 0$.

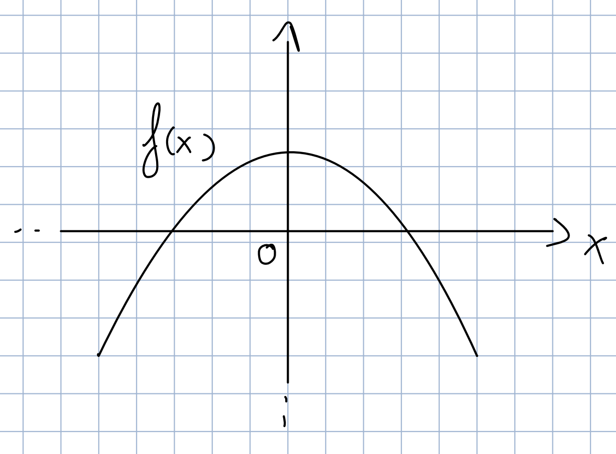
$|-2| = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 \geq 0 \\ -(-2) & \text{se } -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |-2| = -(-2) = 2$ perché $-2 < 0$.

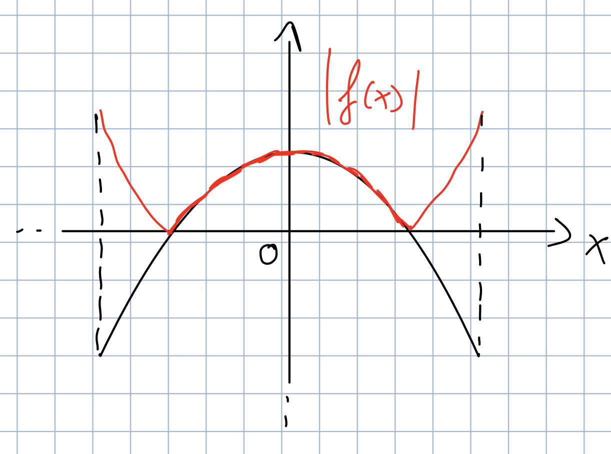
- Grafico della funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$



- Più in generale possiamo avere: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

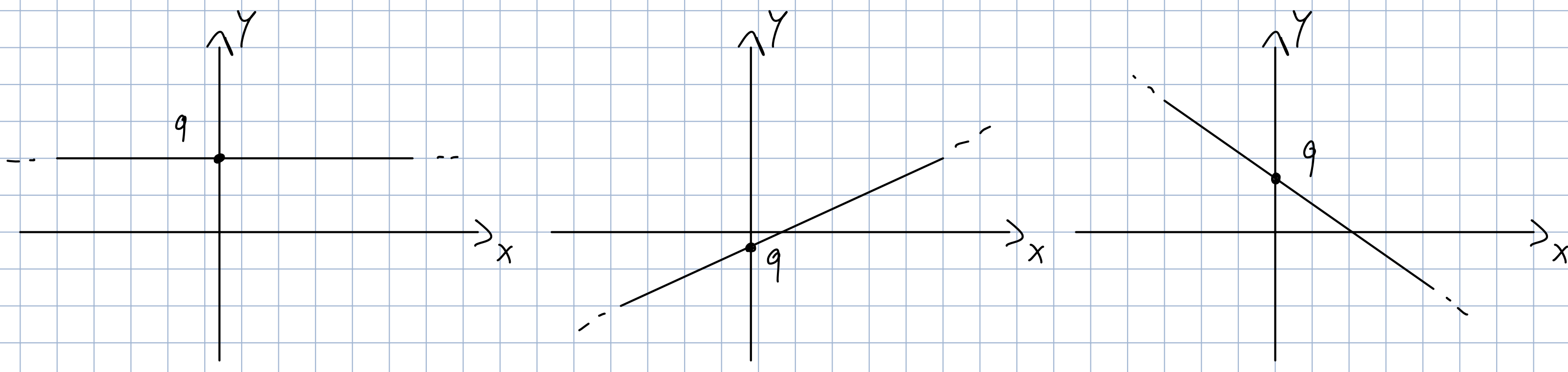




Retta

$y = mx + q$ → retta vista come insieme di punti nel piano

$f(x) = mx + q$ → funzione lineare (il cui grafico è una retta)



$m = 0$ $m > 0$ $m < 0$

- Intersezione con asse y : imponendo $x = 0$ abbiamo $y = q$.
- Intersezione con asse x : imponendo $y = 0$ abbiamo $x = -\frac{q}{m}$ (se $m \neq 0$).

Parabola

$y = ax^2 + bx + c$ → parabola vista come insieme di punti nel piano

$f(x) = ax^2 + bx + c$ → funzione quadratica (il cui grafico è una parabola)

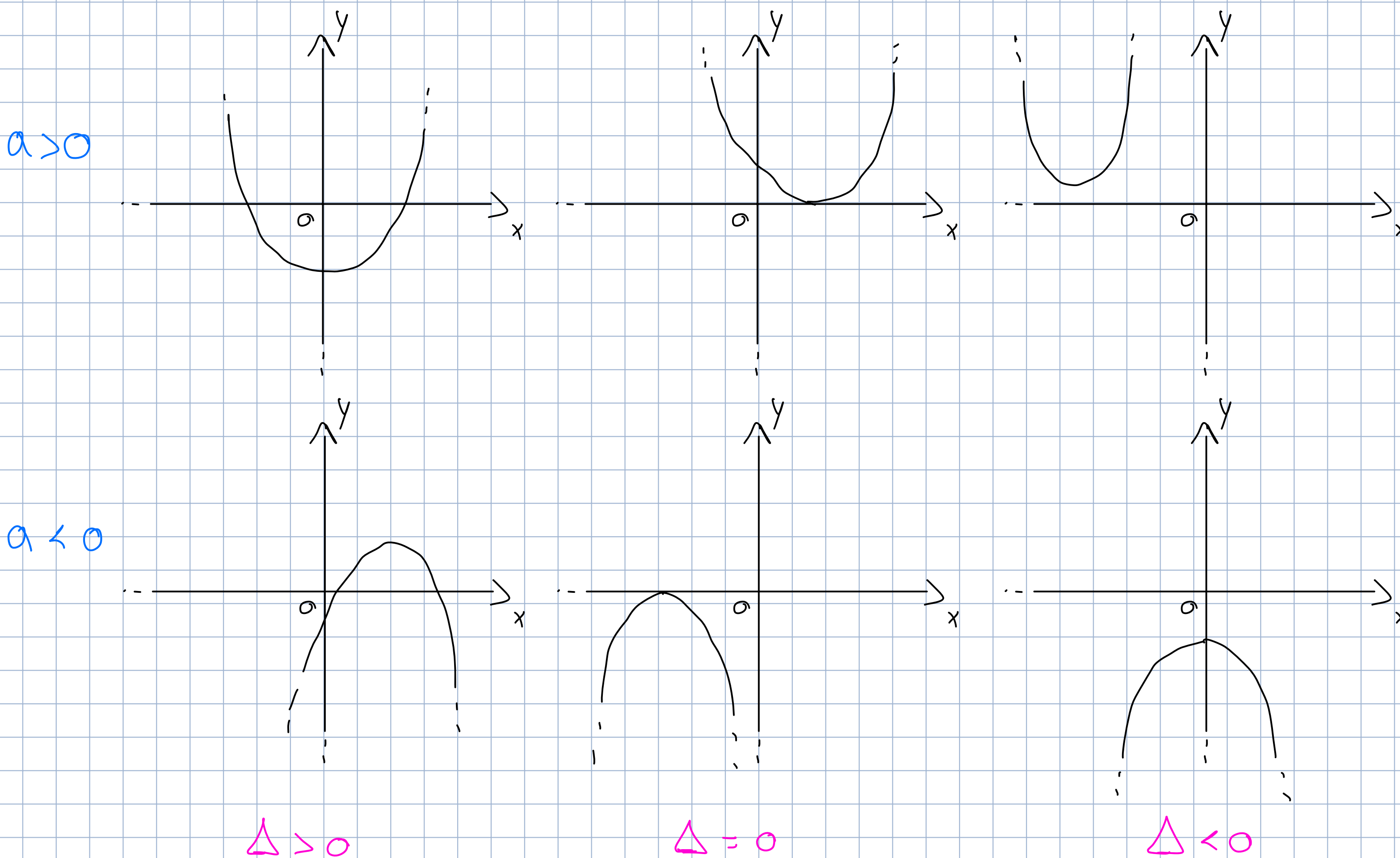
Richiediamo $a \neq 0$ altrimenti la parabola degenera in una retta

- Intersezione con asse y : imponendo $x = 0$ abbiamo $y = c$.
- Intersezione con asse x : imponendo $y = 0$ dobbiamo risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Definendo $\Delta = b^2 - 4ac$ abbiamo

i) 2 soluzioni distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta > 0$

ii) 2 soluzioni coincidenti $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ se $\Delta = 0$

iii) nessuna soluzione (reale!) se $\Delta < 0$.



Iperbole (1)

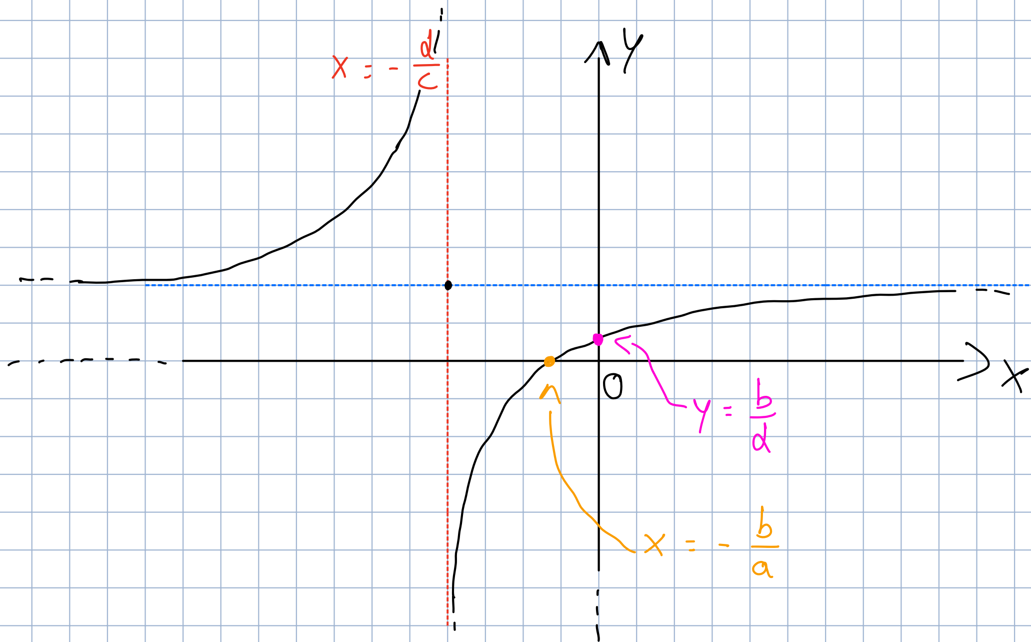
$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \left(\text{oppure } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ come sopra} \ldots \right)$$

Come disegnarla? Basta identificare: (richiediamo $c \neq 0$, altrimenti l'iperbole degenererebbe in una retta)

- asintoto orizzontale: $y = \frac{a}{c}$ (sarà più chiaro con lo studio dei limiti...)
- asintoto verticale: $x = -\frac{d}{c}$ (dove si annulla il denominatore)
- intersezione asse y: imponendo $x = 0$ troviamo $y = \frac{b}{d}$ (se $d \neq 0$)
  - o analogamente intersez. asse x: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$)

→ fatto ciò disegnamo un ramo dell'iperbole (con l'intersezione asse) facendolo tendere agli asintoti e poi disegnamo l'altro simmetrico rispetto al punto $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, ovvero il punto d'incontro tra gli asintoti.

Esempio con $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$



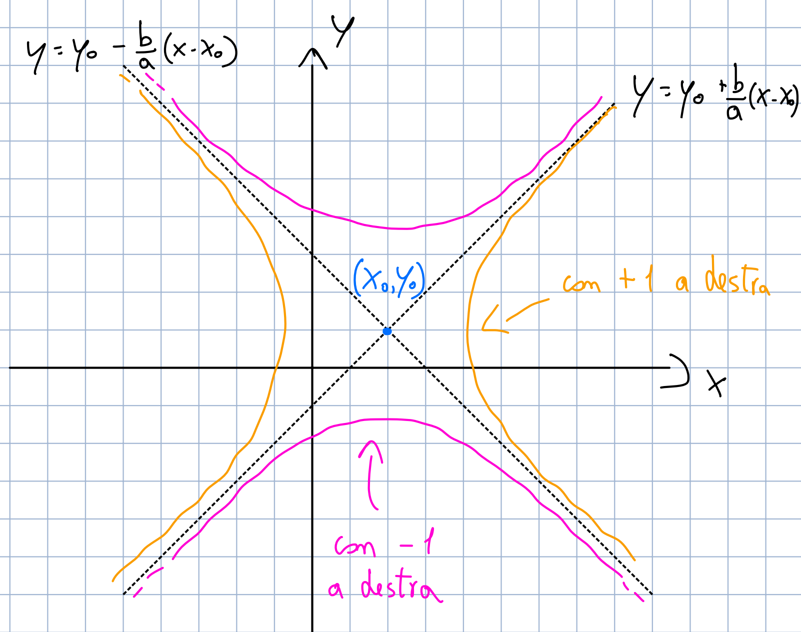
Iperbole (2)

Un altra forma utile di un'iperbole (non direttamente riconducibile ad una funzione) è

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

↳ iperbole centrata in (x_0, y_0) e con

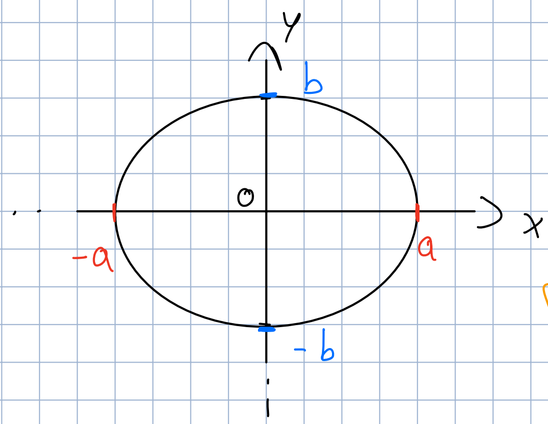
asintoti: $y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$



Ellisse / circonferenza

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

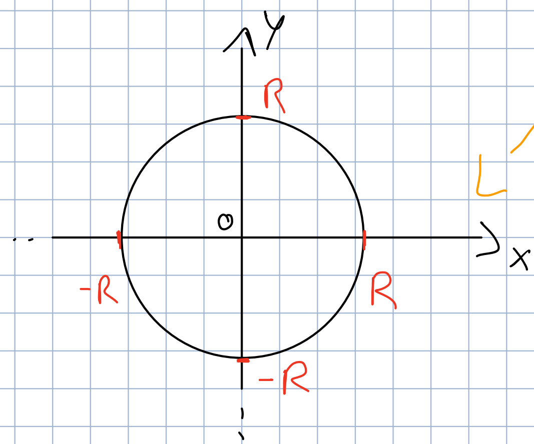
↳ ellisse di semiassi a e b centrata in (x_0, y_0)



Se $a^2=b^2=R^2$ ricadiamo in una circonferenza di raggio R.

centro $(x_0, y_0)=(0,0)$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



ESERCIZI

Es. 1

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 2x|$.

Es. 2

Tracciare il grafico delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad t(x) = \sqrt{x - 4}$$

Es. 3

Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \big|\, |x+1| - 1 \,\big|$$

SOLUZIONI

Es. 1

La funzione è ben definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. Dalla definizione di valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

Disegnamo le 2 parabole $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x$ e capiamo in che intervalli bisogna considerarle.

$y = x^2 - 2x = x(x-2)$ $\longrightarrow$ le intersezioni con asse x sono $\underline{x = 0}$ e $\underline{x = 2}$

dunque

$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

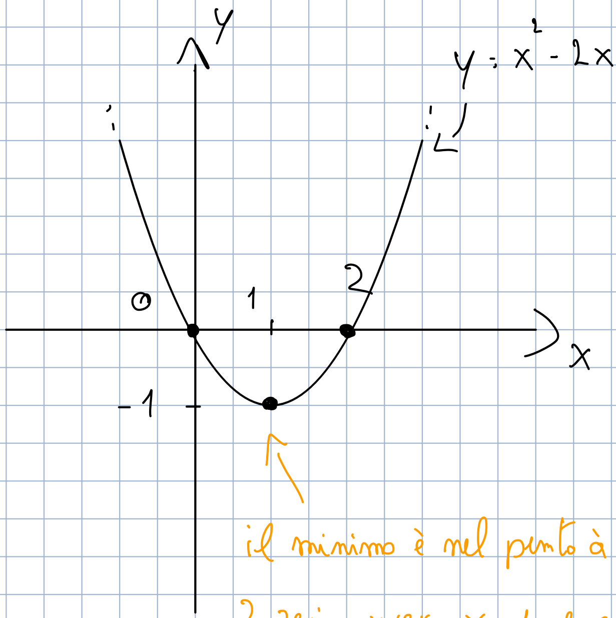
$$\iff x \geq 2 \text{ oppure } x \leq 0$$

Dunque tornando a f

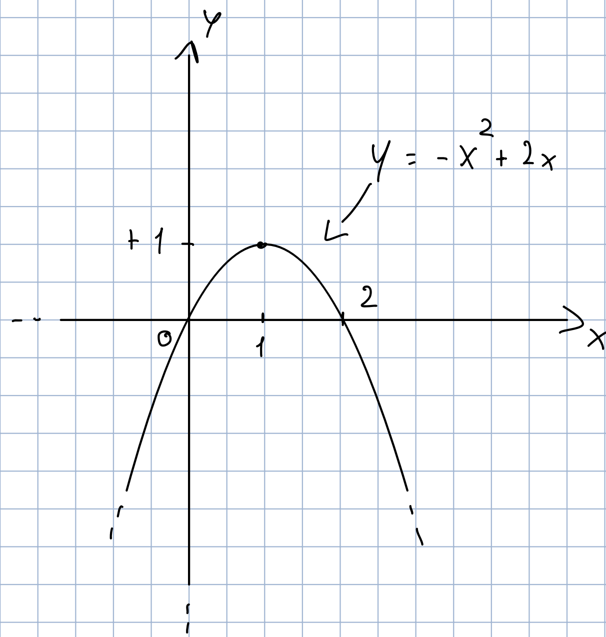
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

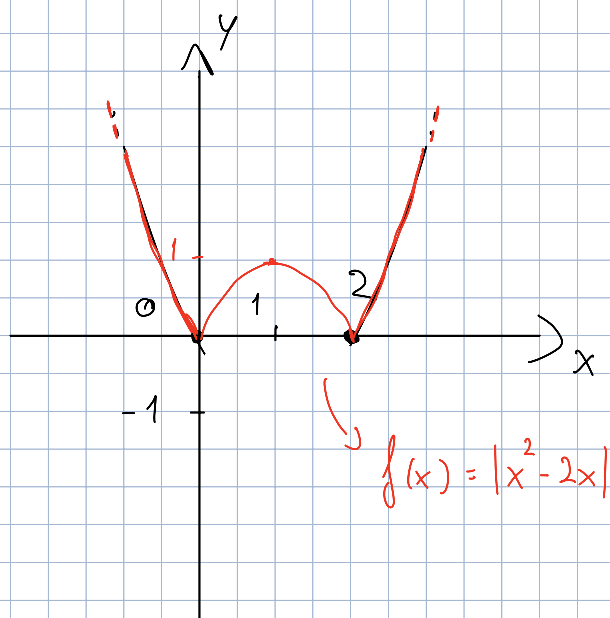
Disegniamo le 2 parabole $y = x^2 - 2x$ e $\underline{y = -x^2 + 2x}$ e poi le mettiamo insieme nei giusti intervalli per disegnare f.

$\hookrightarrow$ si annulla anch'essa in $x = 0$ e $x = 2$, ma ha la concavità al contrario rispetto la prima.



il minimo è nel punto à metà tra i 2 zeri, ovvero $x = 1$, e corrispondentemente abbiamo $y = -1$.





N.B. (NOTA BENE)

Per risolvere l'esercizio basta tracciare il grafico della parabola $y = x^2 - 2x$ e poi "ribaltare" rispetto l'asse x le parti della parabola corrispondenti a ordinate negative.

Es. 2

Questo esercizio è pensato per riconoscere che il grafico di funzioni come quelle proposte è riconducibile a elementi noti della geometria piana. Per vederlo, basta elevare al quadrato ambo i membri e ricondursi alle espressioni note.

i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

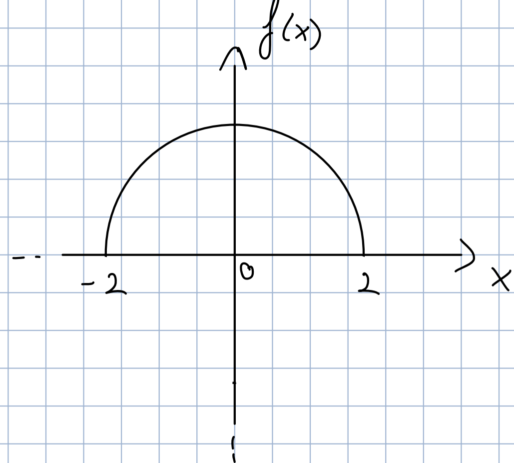
Il grafico è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ovvero i punti del piano che soddisfano $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Dominio: $4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff \underline{-2 \leq x \leq 2}$.

Notiamo anche che la radice di un numero reale è sempre positiva, dunque la funzione f assume valori positivi. Eleviamo al quadrato:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = 4}$$

riconosciamo una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2



→ dunque il grafico di f è un arco di cerchio con valori di y positivi. o, meglio, non negativi ($y \geq 0$)

ii) $g(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$

Allo stesso modo del punto precedente, notiamo che il dominio è:

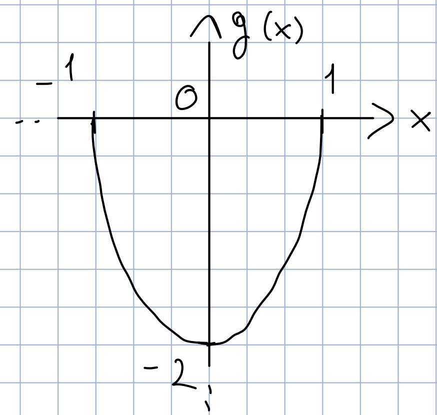
$$4 - 4x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff \underline{-1 \leq x \leq +1}$$

ed elevando al quadrato otteniamo

$$y = -\sqrt{4 - 4x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

→ riconosciamo un'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $a = 1$, $b = 2$,

dunque il grafico di g è un arco di ellisse con valori di $y \leq 0$

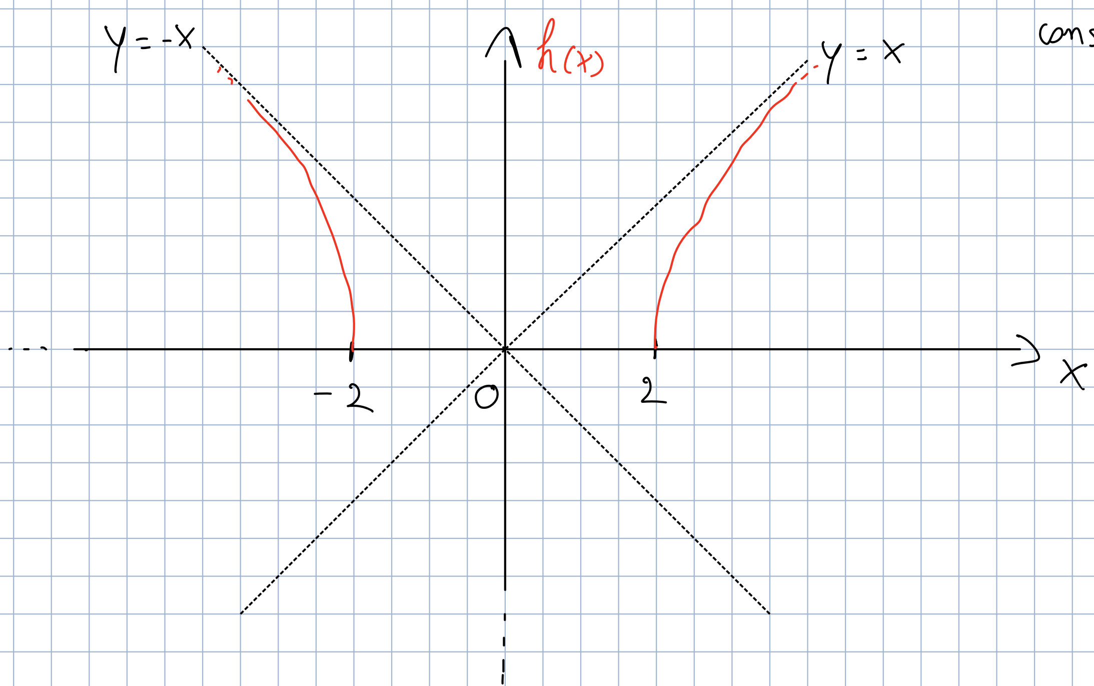


iii) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Dominio : $x^2 - 4 \geq 0 \iff x \leq -2 \;\vee\; x \geq 2$

$y = \sqrt{x^2 - 4} \implies y^2 = x^2 - 4 \implies x^2 - y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

→ riconosciamo un iperbole con centro $(0,0)$ e asintoti $y = \pm x$, di cui dobbiamo considerare i valori di $y \geq 0$.



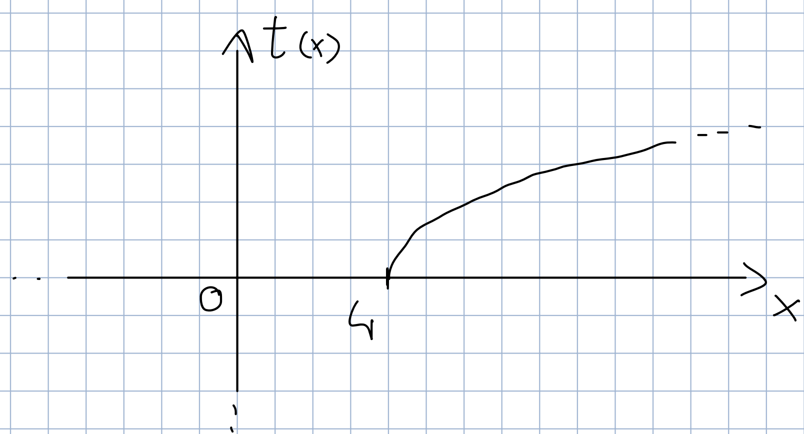
iv) $t(x) = \sqrt{x-4}$

Dominio: $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$

$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow y^2 = x - 4 \Rightarrow x = y^2 + 4$

↳ riconosciamo una parabola con x e y invertiti!

→ il grafico di t sarà dunque un ramo di parabola (con asse di simmetria parallelo all'asse x invece che all'asse y) con valori di $y \geq 0$.



Es. 3

i) $f(x) = \big| |x+1| - 1 \big|$

$$\big| |x+1| - 1 \big| = \begin{cases} |x+1| - 1 & \text{se } |x+1| - 1 \geq 0 \\ -|x+1| + 1 & \text{se } |x+1| - 1 < 0 \end{cases}$$

e inoltre

$$|x+1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x + 1 < 0 \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni per individuare per bene gli intervalli:

- $|x+1| - 1 \geq 0$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+1-1 \geq 0 & \text{se} \quad x+1 \geq 0 \\ -x-1-1 \geq 0 & \text{se} \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{se} \quad x \geq -1 \quad (x \geq -1 \Rightarrow x \geq 0) \\ x \leq -2 & \text{se} \quad x < -1 \quad (x < -1 \Rightarrow x \leq -2) \end{cases}$$

Dunque $|x+1| - 1 \geq 0$ per $x \leq -2 \vee x \geq 0$.

- Scriviamo allora

$$f(x) = \begin{cases} ① \; |x+1| - 1 & \text{se} \quad \underline{x \leq -2 \vee x \geq 0} \\ ② \; -|x+1| + 1 & \text{se} \quad \underline{-2 < x < 0} \end{cases}$$

ma ancora

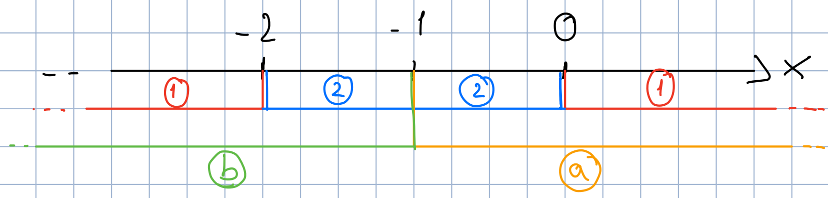
$$① \; |x+1| - 1 = \begin{cases} 1a \quad x & \text{se} \quad \underline{x \geq -1} \\ 1b \quad -x-2 & \text{se} \quad \underline{x < -1} \end{cases}$$

$$② \; |x+1| + 1 = \begin{cases} 2a \quad -x & \text{se} \quad \underline{x \geq -1} \\ 2b \quad x+2 & \text{se} \quad \underline{x < -1} \end{cases}$$

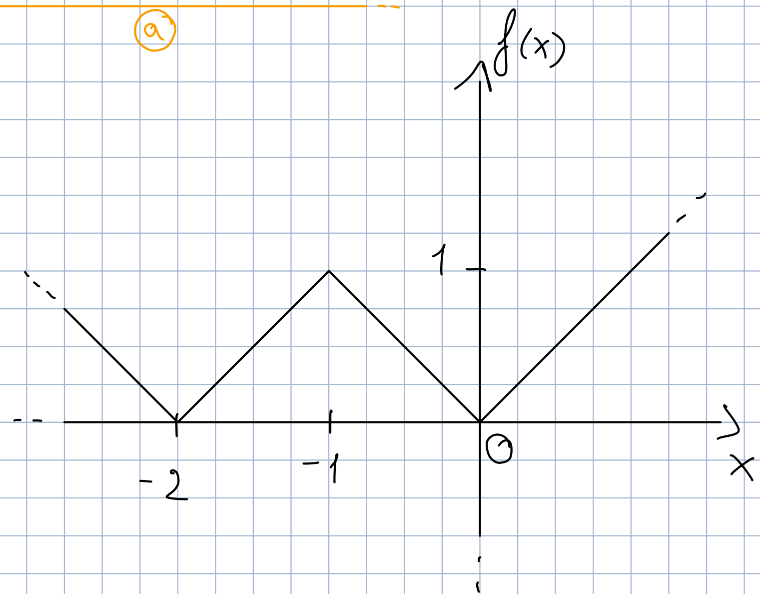
così che dobbiamo distinguere caso per caso tutti gli intervalli

$(-\infty, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, +\infty)$

e otteniamo

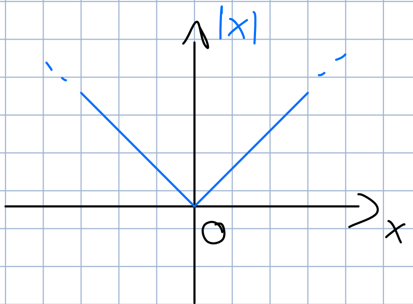


$$f(x) = \begin{cases} 1b & -x-2 & \text{se } x < -2 \\ 2b & x+2 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 2a & -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1a & x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



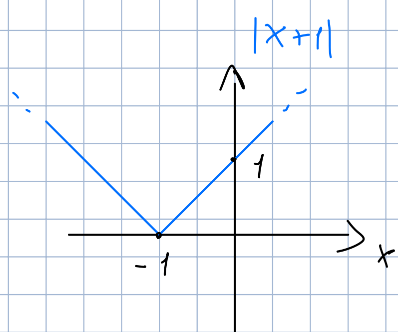
N.B.

L' esercizio poteva essere risolto (più velocemente) per via grafica con traslazioni e ribaltamenti.



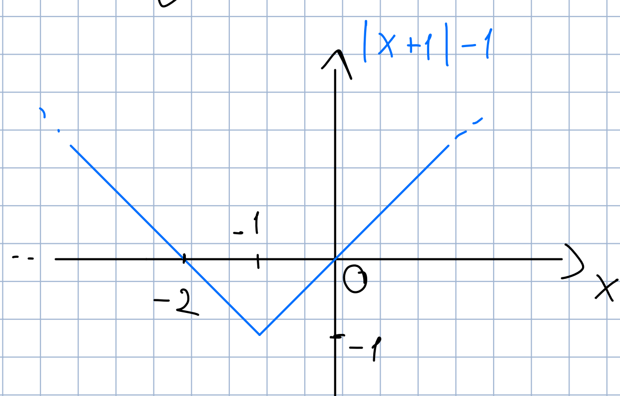
traslo di 1 a sinistra

1



traslo di 1 verso il basso

2



3

ribalto rispetto l'asse x la parte negativa della funzione