Lezione 7 - 6/10/2025

Numeri reali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ numeri interi (qui si può invertire l'operazione di somma

$\forall m \in \mathbb{Z}, \exists m' \in \mathbb{Z} : m + m' = m' + m = 0$

$m' = -m$ opposto.

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$ $\left(\frac{2}{3} = \frac{4}{6}\right)$

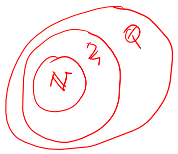
numeri razionali

qui si può invertire il prodotto

cioè $\forall q \in \mathbb{Q}, \ q \neq 0, \ \exists q' \in \mathbb{Q} :$

$q' \cdot q = q \cdot q' = 1$

$q' = \frac{1}{q}$ è il reciproco di q



Problema:

in $\mathbb{Q}$ non si può risolvere l'equazione $x^2 = 2$.

Introduciamo una classe di numeri che contiene $\mathbb{Q}$, ma in cui, ad esempio, il problema non c'è.

Assiomi dei numeri reali

$\mathbb{R}$ è un insieme su cui valgono:

A) è definita $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ addizione o somma

- associativa $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ (x+y)+z = x+(y+z)$
- $\exists$ neutro $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \ 0+x = x+0 = x$
- $\exists$ opposto $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists x' \in \mathbb{R} : \ x+x' = x'+x = 0$
- commutativa $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ x+y = y+x$

M) è definita $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ moltiplicazione o prodotto

- associativa $\forall x, y, z \ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- $\exists$ neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}, \ 1 \neq 0 :$ $\forall x \in \mathbb{R} \ \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- $\exists$ reciproco $\forall x \in \mathbb{R}$, se $x \neq 0$ allora $\exists x' \in \mathbb{R}$ $x \cdot x' = x' x = 1$
- commutativa $\forall x, y \ \ x \cdot y = y \cdot x$

D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributività

O) È definita una relazione d'ordine totale $\geq$ t.c.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se $z \geq 0$ allora $x \geq y \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$.

oss. $\mathbb{R}$ con $+, \cdot, \geq$ si dice campo (ordinato)

$\mathbb{R}$ con $+, \cdot$

¡attenzione: anche $\mathbb{Q}$ godono delle stesse proprietà!

quindi: Deve valere un altro assioma

5) (Assioma di *separazione* o di Dedekind)

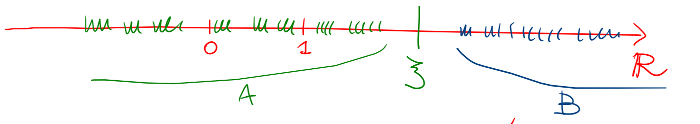
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

supponiamo che $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b$

Allora $\exists \xi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq \xi \leq b$$

elemento separatore



es. $\mathbb{Q}$ non ha questa proprietà!

idea:

grazie a Euclide (o Pitagora) so che in $\mathbb{Q}$ non ci sono numeri tali che il quadrato sia 2. (cioè non c'è un numero $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$)

dimostriamolo per assurdo.

supponiamo esistano $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

tale che $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

non è restrittivo supporre che la frazione $\frac{m}{n}$ sia "ridotta ai minimi termini", cioè m e n non hanno fattori in comune.

per assurdo supponiamo $\frac{m^2}{n^2} = 2$

$\Downarrow$

$m^2 = 2n^2$

allora 2 è un fattore di m^2

$\Downarrow$

2 è un fattore di m

$\Downarrow$

$m = 2k$ per qualche k

$\Downarrow$

$m^2 = 4k^2 = 2n^2$

$\Downarrow$

$n^2 = 2k^2$

$\Downarrow$

n è divisibile per 2

$\Downarrow$

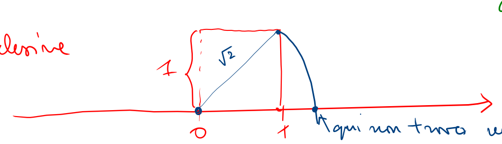
m e n sono divisibili per 2

$\Downarrow$

$\frac{m}{n}$ non era ridotta ai minimi termini

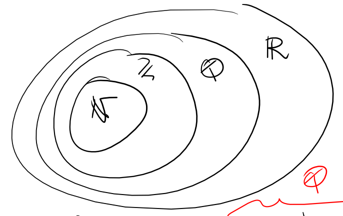
assurdo

conclusione



qui non trovo un numero razionale!

ho quindi



$\mathbb{R}$ gode delle proprietà $\overbrace{A), M), D), O),}^{\mathbb{Q}}$ S)

(si può provare che è l'unico insieme con queste proprietà)

- def. (Retta estesa)

consideriamo 2 simboli $+\infty$, $-\infty$ (più infinito, meno infinito)

l'unione $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \widetilde{\mathbb{R}}$ unione dei numeri reali estesi

attenzione $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri

- def. (intervalli)

siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $(\leq \wedge \neq)$

indico $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \ \wedge \ x \leq b\}$

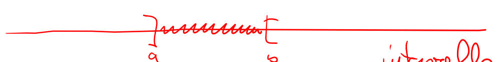
$a \leq x \leq b$

estremi compresi

intervallo chiuso e limitato.

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \ \wedge \ x < b\}$

$a < x < b$

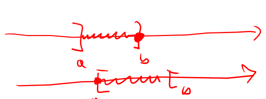


estremi esclusi

intervallo aperto e limitato.

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$

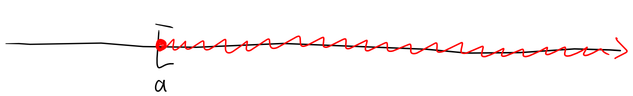


intervalli semi aperti (o semi chiusi) limitati.

sia $a \in \mathbb{R}$

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$

intervallo superiormente illimitato e chiuso



$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$

intervallo sup. illimitato e aperto

$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\}$

intervallo inf. illimitato e chiuso

$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}$

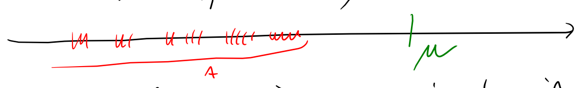
int inf. illimitato e aperto

Posso scrivere

$$]-\infty,+\infty[\; = \mathbb{R}$$

comunicazione: giovedì 9 ott., venerdì 10 ott. } non c'è lezione.

def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$
supponiamo $\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ t.c.
$\forall a \in A, \quad a \le \mu$

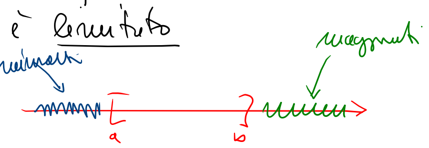


diremo che μ è un maggiorante di A
" " A è superiormente limitato.

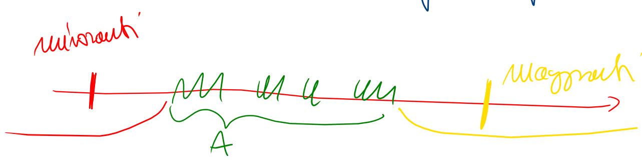
supponiamo $\exists\, \nu \in \mathbb{R}$ t.c.
$\forall a \in A, \quad \nu \le a$
diremo che ν è un minorante di A
" A è inferiormente limitato

se A è superiormente e inferiormente limitato
diremo che A è limitato

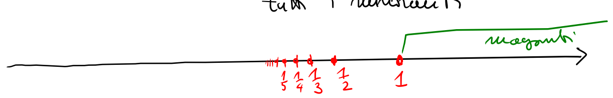
es. $A = [a,b]$



chi sono i maggioranti di A? $y \in \mathbb{R}: \; y \ge b$ (anche b)
minoranti di A? $y \in \mathbb{R}: \; y \le a$ (anche a)



ES. sia $A = \{\frac{1}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
trova, se ci sono, tutti i maggioranti
tutti i minoranti



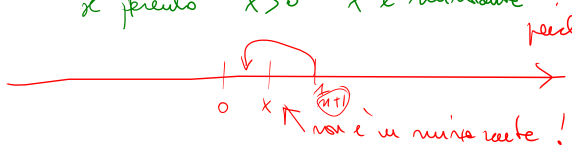
$A^* = \{\text{maggioranti}\} = \{x \in \mathbb{R} : \; x \ge 1\}$
$A_* = \{\text{minoranti}\} = \{x \in \mathbb{R} : \; x \le 0\}$

se $x<0$ allora $x < \frac{1}{n+1}$ (perché $\frac{1}{n+1} > 0$)

quindi se $x<0$, x è minorante
se $x=0$, 0 è minorante? sì $0 < \frac{1}{n+1}$

fino ad adesso $]-\infty,0] \subseteq A_* = \underline{]-\infty,0]}$

se prendo $x>0$ x è minorante? no perché esiste $\bar{n}$ t.c. $\frac{1}{\bar{n}+1} < x$



def. sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
se $m \in A$ e m è maggiorante di A
allora m si dice massimo di A

m massimo $\iff \begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A, \ a \le m \end{cases}$

se $m \in A$ e m è un minorante di A
allora m si dice minimo di A

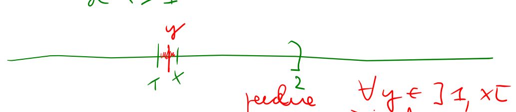
m minimo $\iff \begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A, \ m \le a \end{cases}$

Es. $A =]1,2] = \{ x \in \mathbb{R} : \ 1 < x \le 2 \}$

A ha massimo? sì è 2
A ha minimo? no come mai?

1 non è minimo ($1 \notin A$)

A non ha minimo
perché se $x < 1$ $\quad x \notin A$
se $x = 1$ $\quad x \in A$
se $x > 1$ $\quad x$ non è minorante di A



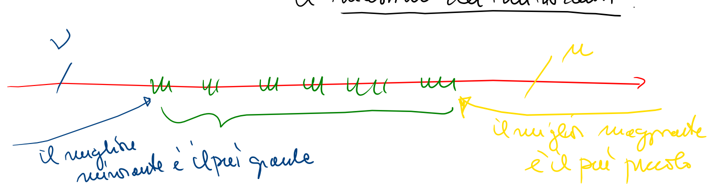
perché $\forall y \in]1, x[$ è in A e non vale $y \geq x$

$y = \frac{1+x}{2}$ va bene

oss. prendo A limitato
allora $A^* = \{\text{maggioranti di } A\}$, $A^* \neq \emptyset$
$A_* = \{\text{minoranti di } A\}$, $A_* \neq 0$

A in generale non ha massimo
" " " " minimo
come possiamo sostituire il massimo (che qualche volta non c'è)
" " " " minimo

def. sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
se A è sup. limitato, diciamo estremo superiore di A
il minimo dei maggioranti
se A è inf. limitato, diciamo estremo inferiore di A
il massimo dei minoranti



TEOREMA (Esistenza dell'estremo superiore (estremo inferiore))

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A sup. limitato

Allora $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \underbrace{\sup A}_{\text{estremo superiore di } A}$

(Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A inf. limitato

Allora $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \underbrace{\inf A}_{\text{estremo inferiore di } A}$)

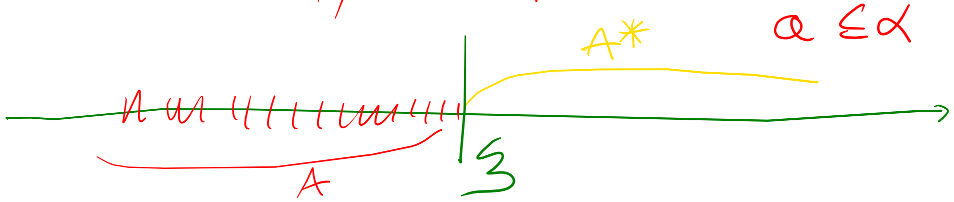
dim.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A sup. limitato

Allora $A^* = \{\text{maggioranti di } A\} \neq \emptyset$

a questo punto ho

$A \neq \emptyset$, $A^* \neq \emptyset$ e $\forall a \in A$, $\forall \alpha \in A^*$, $a \leq \alpha$



Applico S) l'assioma di separazione

$\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall \alpha \in A^*, \quad a \leq \xi \leq \alpha$

in particolare $\forall a \in A$, $a \leq \xi \Rightarrow \xi$ è un maggiorante

$\forall \alpha \in A^*$, $\xi \leq \alpha \Rightarrow \xi$ è il minimo dei maggioranti

quindi $\xi = \sup A$

CVD