7 ottobre

Funzioni

Dati due insiemi X e Y, una funzione di dominio X e di insieme di valori Y è una "legge" o "criterio" che associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento dell'insieme Y.

Di solito si denota la generica funzione col simbolo $f : X \to Y$ denotando con $f(x)$ l'elemento di Y associato al generico $x \in X$.

Def (Restrizione) Sia $f : X \to Y$ e sia $A \subset X$. Allora resta definita una nuova funzione $f|_A : A \to Y$ definita da

$$f|_A(a) = f(a) \qquad \forall a \in A.$$

Def (Immagine di un insieme) Sia $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$. Allora

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$$

è l'immagine di A tramite la funzione $f : X \to Y$.

Def (Controimmagine) Sia $f : X \to Y$ e sia $B \subseteq Y$. Allora

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X ; f(x) \in B \}$$

è la controimmagine di B.

Per $B = \{y_0\}$ si scrive anche

$$f^{-1}(y_0) = f^{-1}(\{y_0\})$$

Def (Grafico di una funzione) Data

$f: X \to Y$

$$\Gamma_f = \{ (x,y) \in X \times Y : \underset{x \in X}{y = f(x)} \} =$$

$$= \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \}$$

<u>Def</u> Data $f : X \longrightarrow Y$ si dice che

1) f è iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2) f suriettiva se $\forall\, y \in Y \;\exists\, x \in X$ t.c. $y = f(x)$.

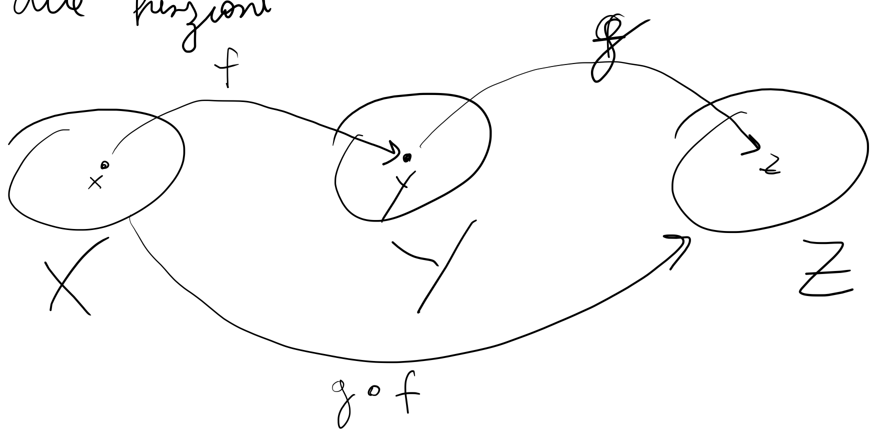
3) Se f è sia suriettiva che iniettiva viene detta biettiva.

Def (Composizione di funzioni)

Siano $f : X \to Y$

e $g : Y \to Z$

due funzioni



$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$x \to e^{-x^2} = g(-x^2) = g(f(x))$$

dove $g(\cancel{y}) = e^{\cancel{y}}$, $f(x) = -x^2$

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$$f(g(y)) = -(g(y))^2 = -(e^y)^2 = -e^{2y}$$

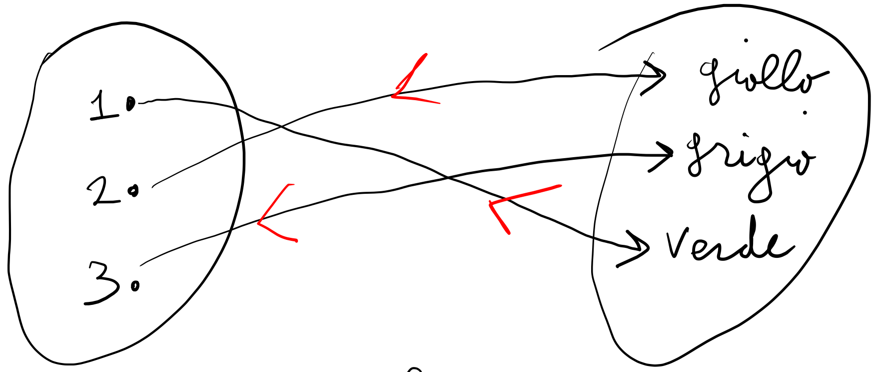
$$f(g(x)) = -e^{2x}$$

$$g(f(x)) = e^{-x^2}$$

sono due funzioni distinte

$$f(g(0)) = -e^{2\cdot 0} = -1$$

$$g(f(0)) = e^{0} = 1$$



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

qui

$f : X \to Y$ è biettiva e

$g : Y \to X$ è la sua funzione inversa

$g = f^{-1}$

$$\frac{1}{f(x)}$$

$(f \circ g) = 1_Y = id_Y$

$id_X = 1_X = g \circ f$ è la funzione identica o identità nell'insieme X

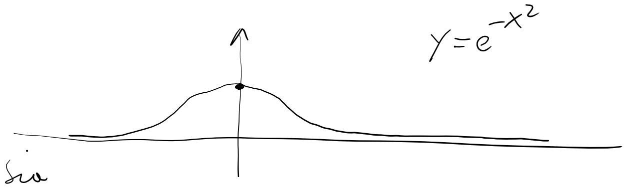
(Y)

$f(x) = e^{-x^2}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Gamma_f = \{(x, e^{-x^2}) : x \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y) : y = e^{-x^2}\}$



Sia

$f: X \to Y$ biettiva e

sia $g: Y \to X$ la sua funzione inversa

$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\} = \{(x,y) \in X \times Y : x = g(y)\}$

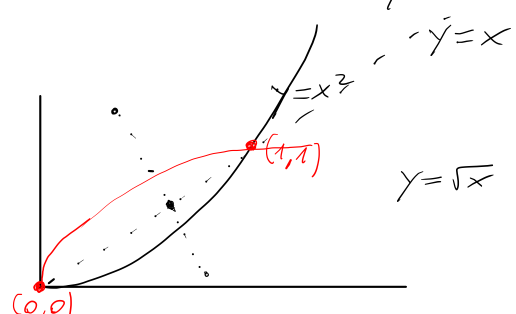
$\Gamma_g = \{(y,x) \in Y \times X : x = g(y)\}$

Qui $y = f(x) \iff x = g(y)$

Si nota che Γ_g è ottenuto da Γ_f scambiando le coordinate

Esempio $x^2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è biettiva. L'inversa è la funzione che associa ad ogni $y \geq 0$ l'unico $x \geq 0$ t.c. $y = x^2$

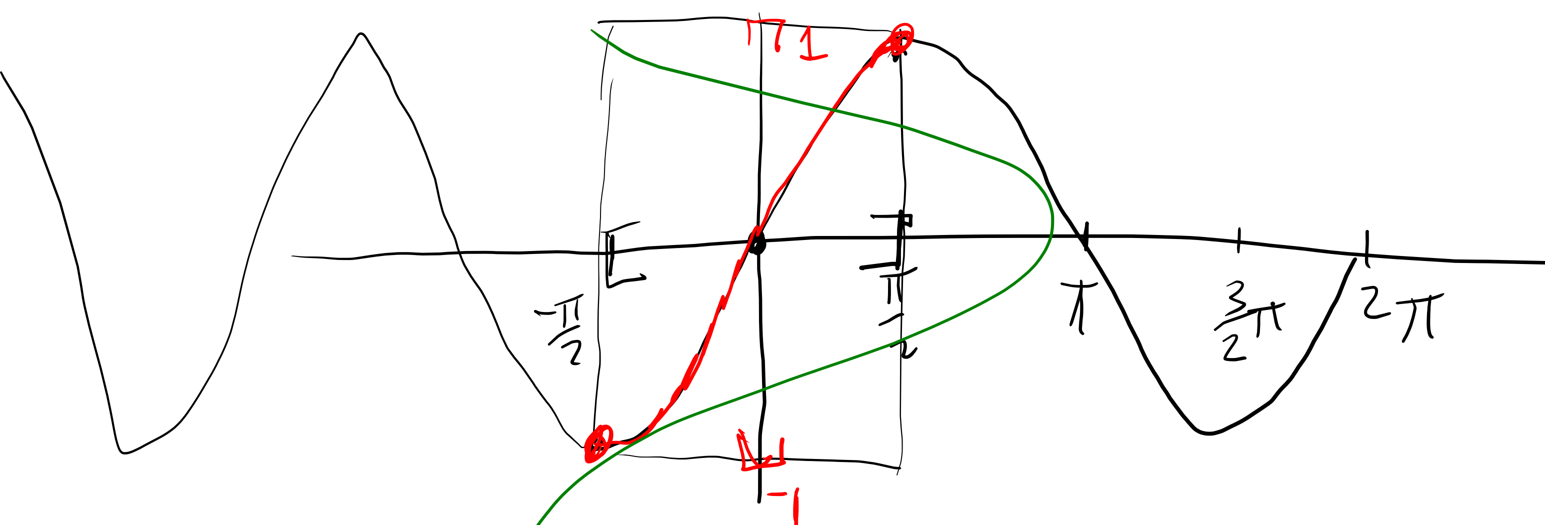
cioè $x = \sqrt{y}$



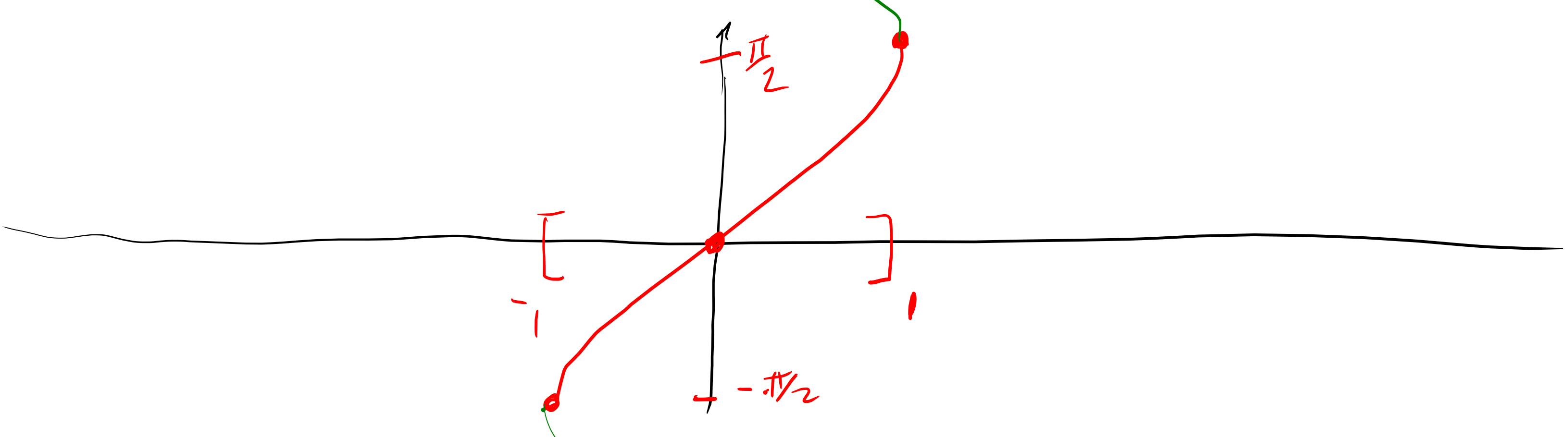
Esempio: l'arcoseno

$$\mathrm{sen}\, x : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \mathrm{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

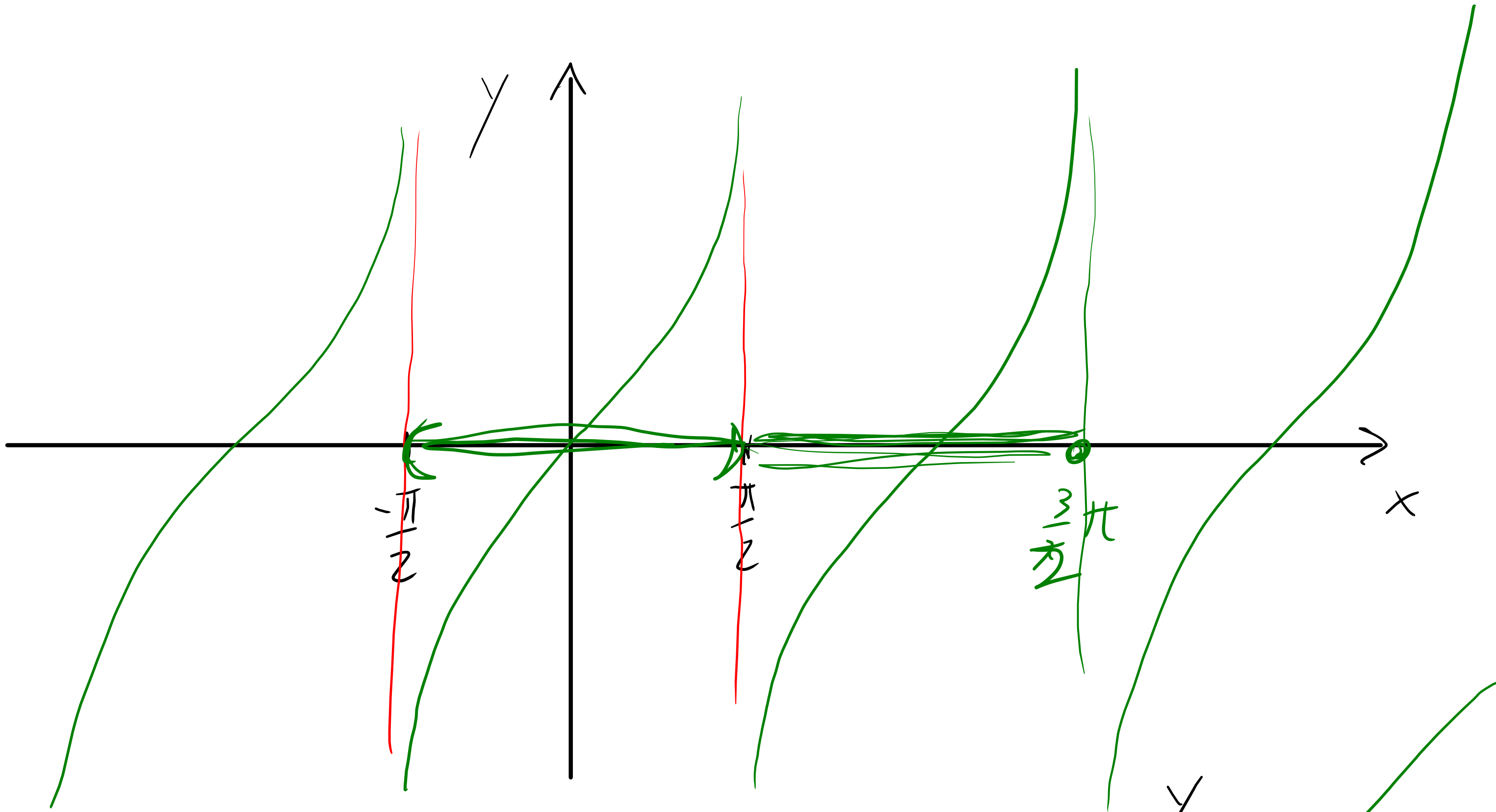
arcsin



$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

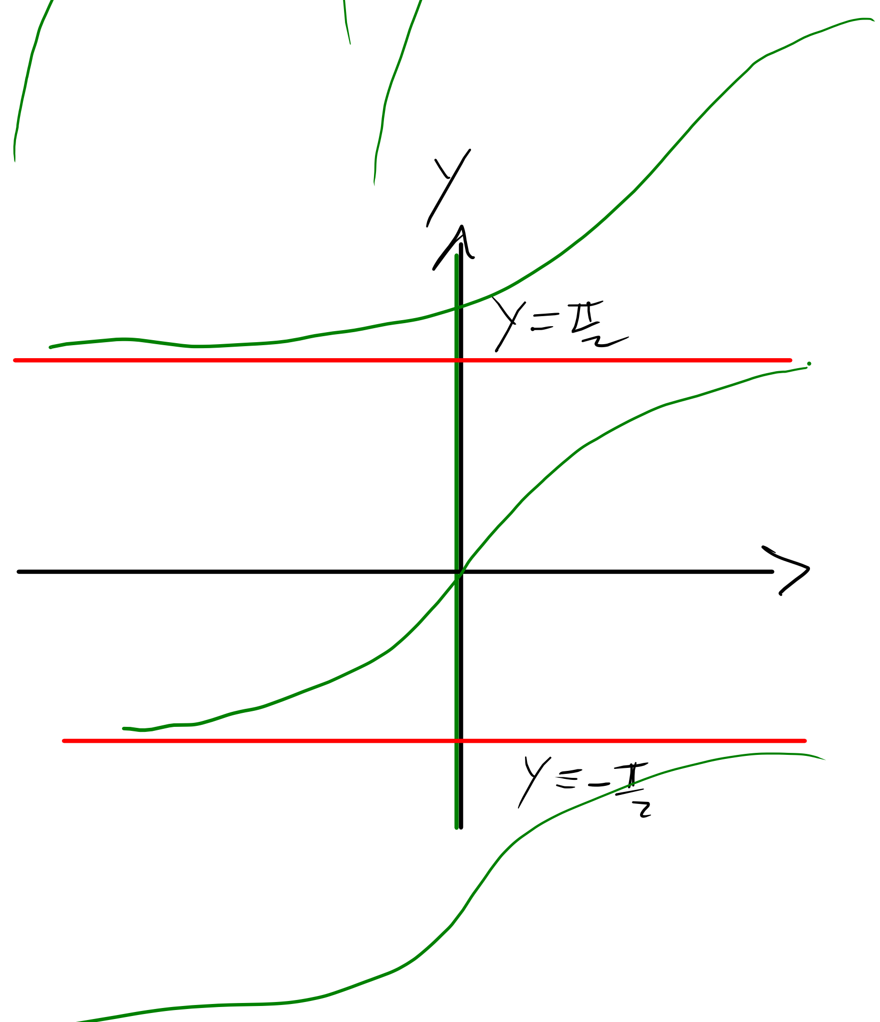


$\tan : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R}$



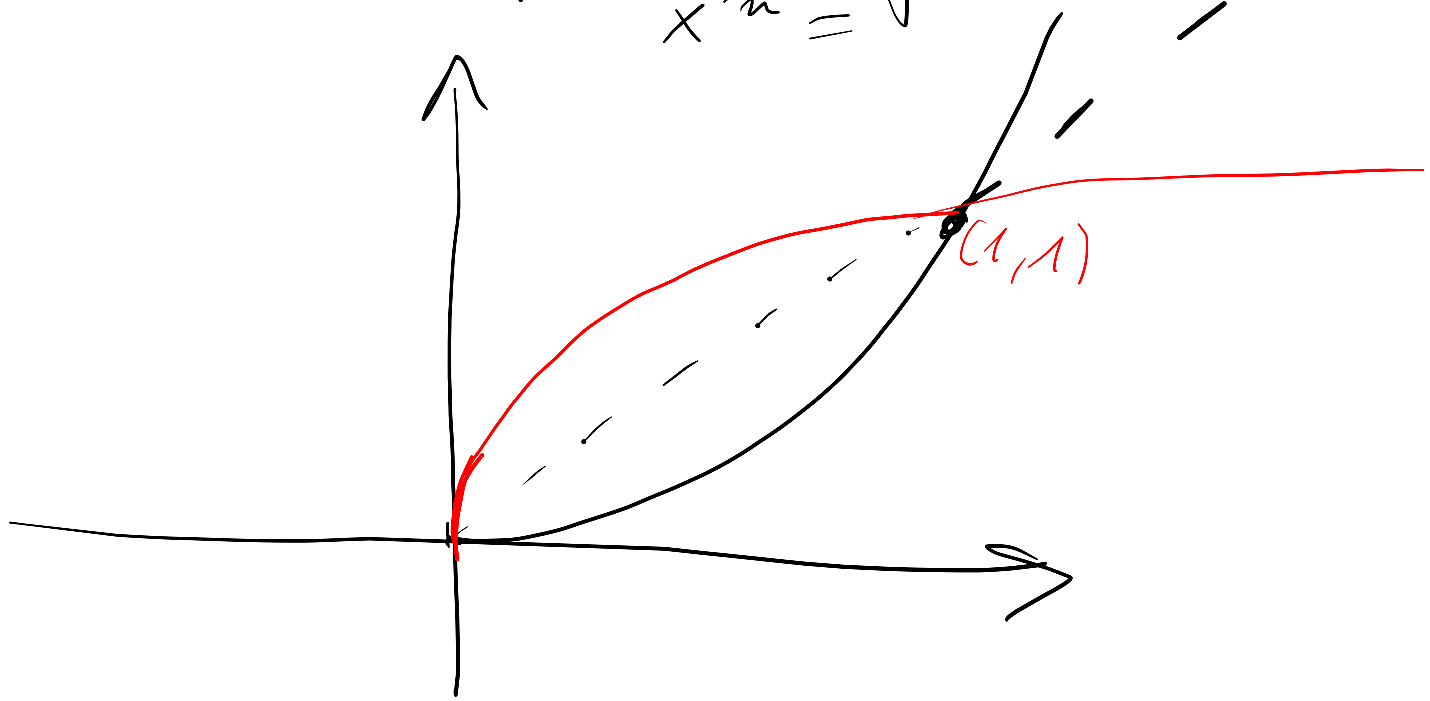
$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$

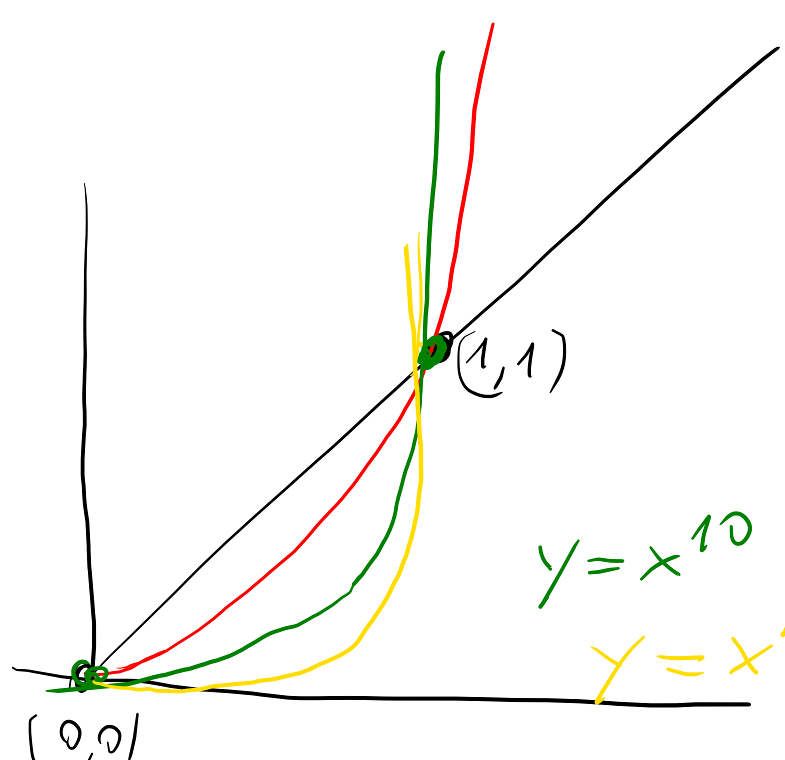
$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



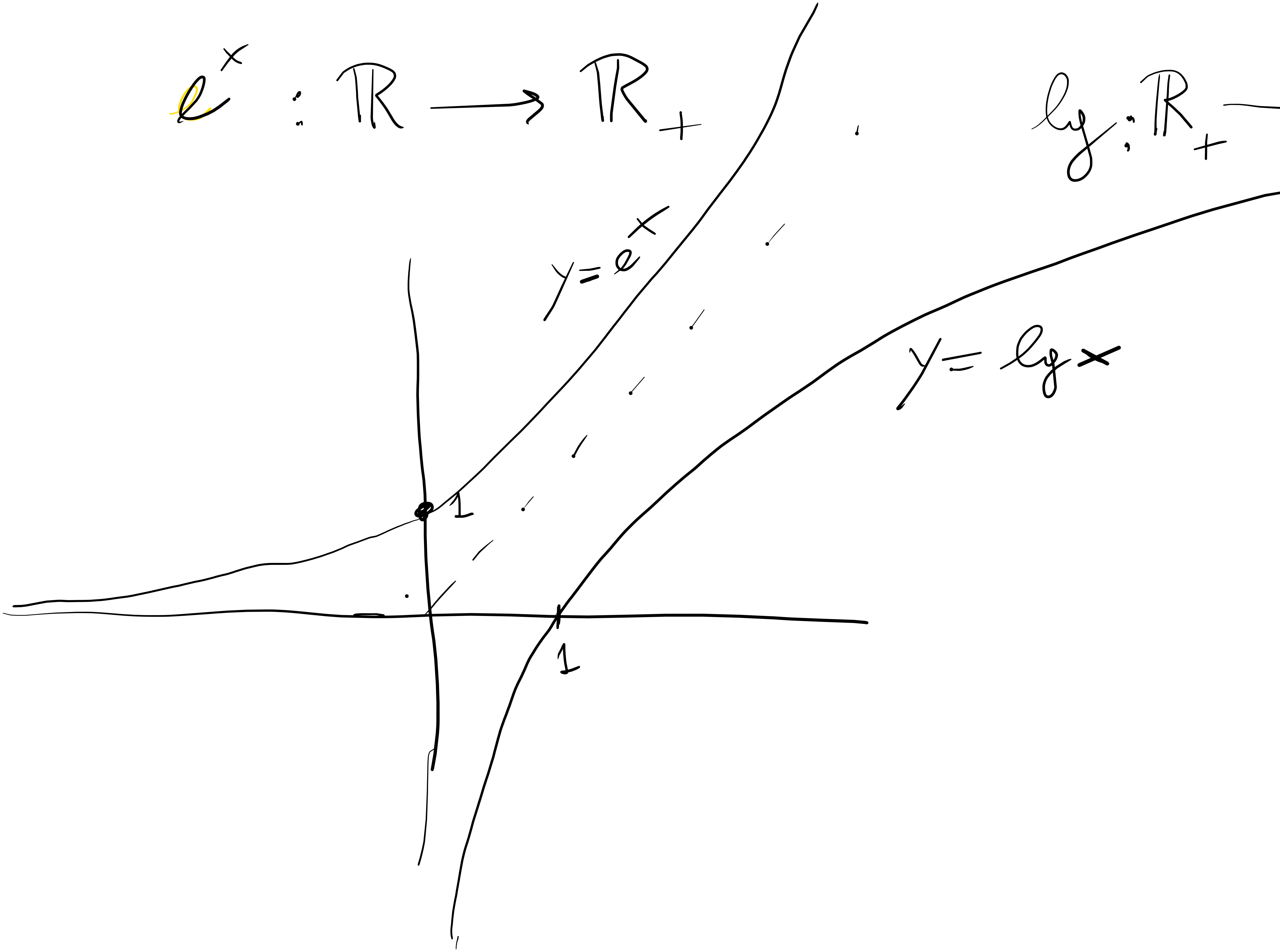
$x^n : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \qquad n \geq 2$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$



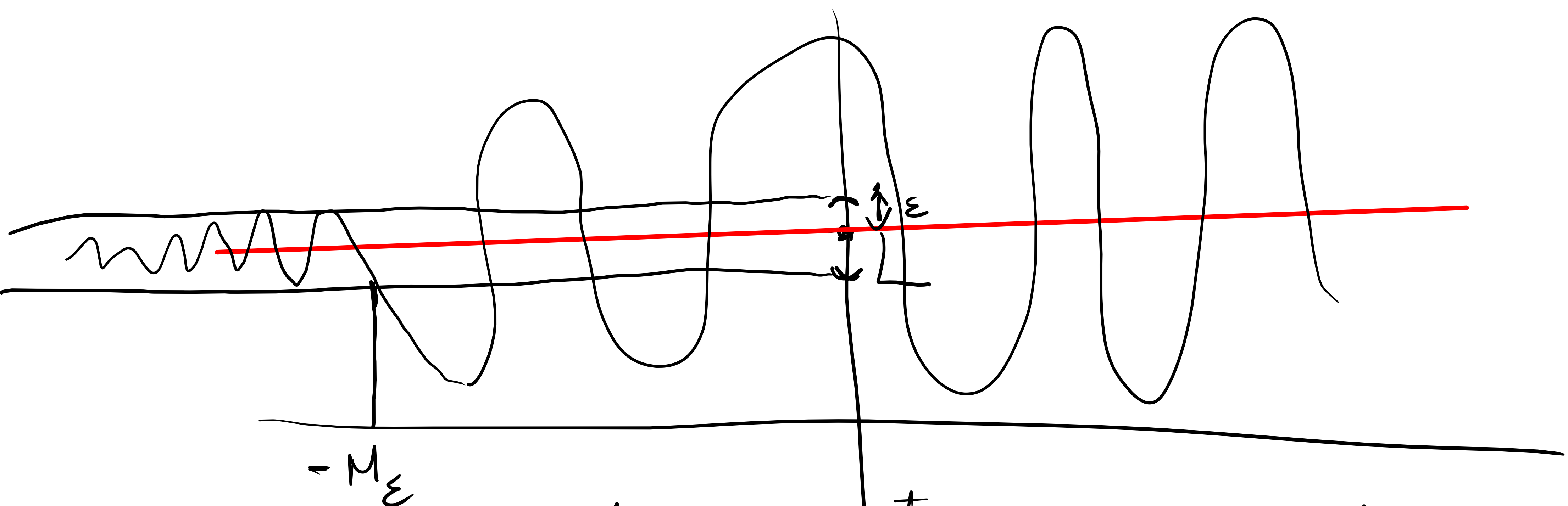


$e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\qquad$ $\lg : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$



<u>Def</u> Sia $f : X \to \mathbb{R}$ $\quad \inf X = -\infty$

sia $L \in \mathbb{R}$. Diremo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se



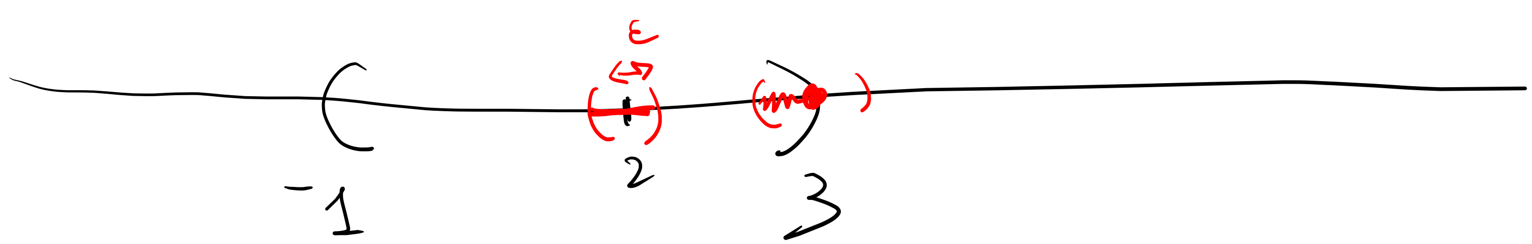
se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon > 0$ t.c. $x < -M_\varepsilon$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

<u>Def</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice detto punto di accumulazione per X se

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in X$ t.c. $\quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon$

<u>Es</u> Se $X = (-1, 3)$ si ha che tutti i punti di $[-1, 3]$ sono punti di accumulazione per $(-1,3)$



Es $X = \mathbb{Q}$ Allora ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Q}$