

Esame di Teoria dei Gruppi — 22.01.25

Laurea Magistrale Interateneo in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Il gruppo delle permutazioni di quattro elementi S_4 ha irrep r_1, r_2 di dimensione 1, r_3 di dimensione 2, r_4 di dimensione 3, e un'altra irrep r_5 . Determinare la dimensione di r_5 .
2. Si consideri ancora il gruppo S_4 . Di una rappresentazione *riducibile* r sappiamo che ha dimensione 6 e che il prodotto scalare del carattere con sé stesso è 2. Determinare la decomposizione di r in irreps.

Esercizio 2

1. Definire cos'è un'algebra di Lie.
2. Dare la definizione di rappresentazione di un'algebra di Lie.
3. Cos'è la rappresentazione aggiunta?

Esercizio 3

Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

1. Si disegni il suo diagramma di Dynkin.
2. A partire da tale diagramma, si ricavi l'insieme delle root, disegnandole su un piano.
3. Si dia una base di generatori e si ricavino le loro matrici nella rappresentazione il cui highest weight ha Dynkin labels $(1, 0)$.
4. [Facoltativo: Usando i Dynkin labels, si costruisca la rappresentazione $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, dicendo da quali rappresentazioni irriducibili essa è composta.]