

Esame di Teoria dei Gruppi — 10.02.25

Laurea Magistrale Interateneo in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Dato un gruppo G , mostra che il sottoinsieme $D = \{(g, g) | g \in G\}$ del prodotto diretto $G \times G$ è un sottogruppo di $G \times G$.
2. Mostra che D è un sottogruppo normale di $G \times G$ se e soltanto se G è abeliano.
[Suggerimento: Per mostrare che ‘ D normale’ $\Rightarrow$ ‘ G abeliano’, considera $(g_1, g_2)D(g_1, g_2)^{-1}$ con $g_1 = e$ l’elemento identità in G].
3. Nel caso di $G = \mathbb{Z}_2$, calcola, riportando i vari passaggi, il gruppo quoziente $(G \times G)/D$.

Esercizio 2

1. Definire cos’è un gruppo di Lie. In che senso $SU(2)$ è un gruppo di Lie?
2. Dare la definizione di centro $Z(G)$ di un gruppo G .
3. Qual è il centro del gruppo $SU(N)$?

Esercizio 3

Si consideri l’algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

1. Si descriva tale algebra di Lie, scrivendo in particolare una base di generatori e le rispettive costanti di struttura.
2. Si disegni il diagramma di Dynkin dell’algebra di Lie in esame e si derivi l’insieme delle root.
3. Si classifichino le sue rappresentazioni finito-dimensionali.
4. Si ricavino le matrici che rappresentano i generatori nella rappresentazione aggiunta e si verifichi che tali matrici danno una rappresentazione dell’algebra.
5. Si costruisca la rappresentazione con Dynkin label 1.