

Esercizi II settimana Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacchi
A.A. 2025/2026

1. Si considerino gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 60, 400\}$, $A' = \{10, 20, 30, 40, 60\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $B' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e sia R la relazione così definita

$$xRy \iff x \text{ ha la prima cifra (a sinistra) uguale alla prima cifra (a sinistra) di } y$$

quando $x \in A$ e $y \in B$. Si stabilisca - **motivando la risposta** - se R è una funzione o meno. In caso affermativo si determini se tale funzione risulta iniettiva e/o suriettiva e/o biiettiva. Si ripeta lo stesso esercizio quando

a) $x \in A$ e $y \in B'$ b) $x \in A'$ e $y \in B'$ c) $x \in A'$ e $y \in B$.

2. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-3, -1, 2, 5, 9\}$ due sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$. Allora funzioni iniettive e di dominio A e codominio B

i esistono e sono esattamente 5 ii esistono e sono esattamente 4

iii esistono e sono esattamente 3 iv non esistono

3. Siano $A_{25} = \{\text{numeri naturali minori o uguali a } 25\}$ e $B_{24} = \{\text{divisori di } 24\}$.

Calcolare $\#([A_{25} \cup B_{24}] \cap \mathcal{P})$ ove $\mathcal{P}$ rappresenta l'insieme dei numeri pari.

4. Stabilire se la relazione definita da $xRy \iff x \cdot y > 0$ per $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è o meno una relazione di equivalenza.

5. Mostrare con un esempio che la somma di due numeri naturali può essere multiplo di 5 anche se gli addendi non lo sono necessariamente. Trovare una caratterizzazione di tale fatto considerando le classi di resto modulo 5.

In generale, è vero che la somma dei resti è il resto della somma di due numeri naturali (rispetto allo stesso divisore considerato)?

6. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ risulta

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2.$$

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2022]

7. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $d_n = n(17n^2 + 103)$ è un multiplo di 6.

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DI DICEMBRE 2023]

8. Data la funzione $k \in \mathbb{N} \mapsto \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) := a_k \in \mathbb{Q}$ ($k \geq 1$) si consideri

$$b_n := a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \quad n \geq 2.$$

Si mostri - usando il Principio di Induzione - che $b_n = \frac{n+1}{2n}$.

Trovare inoltre $\inf \left(\left\{ 1 - \frac{1}{k^2} : k \geq 1 \right\} \right)$ e $\sup \left(\left\{ 1 - \frac{1}{k^2} : k \geq 1 \right\} \right)$

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO ESTIVO 2024]

9. Mostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$