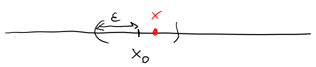
9 ottobre

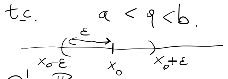
__Def__ Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora x_0 si dice un punto di accumulazione per X se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - x_0| < \varepsilon$



Poniamo $X' = \{$ l'insieme dei punti di accumulazione di $X \}$

__Es__ $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Questo si basa sul fatto che $\mathbb{Q}$ è "denso" in $\mathbb{R}$ cioè soddisfa la seguente proprietà

__Teor__ (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) Per ogni $a < b$ in $\mathbb{R}$ $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < q < b$. □

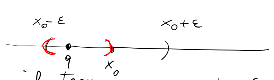


__Corollario__ $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Dim. Si tratta di dimostrare che ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Q}$.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$\{x : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



Applichiamo il teorema per $a = x_0 - \varepsilon$ e $b = x_0$.
Il teorema ci dice che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c.

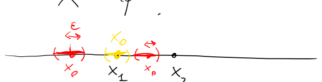
$$x_0 - \varepsilon < q < x_0 .$$

Abbiamo appena dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } 0 < |q - x_0| = x_0 - q < x_0 - (x_0 - \varepsilon) = \varepsilon$$

□

__Teorema__ Se $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\operatorname{card} X < +\infty$ allora $X' = \emptyset$.



$X = \{x_1, x_2\}$

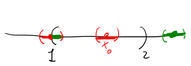
Qui $X' = \emptyset$ perché se $x_0 \notin \{x_1, x_2\}$, prendo $0 < \varepsilon < \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|\}$ si ha

$$X \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \emptyset \implies x_0 \notin X'$$

Se invece prendo $x_0 = x_1$ e scelgo $0 < \varepsilon < |\overset{x_0}{x_1} - x_2|$ allora

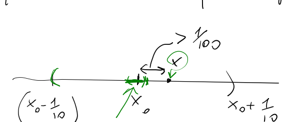
$$X \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\} \implies x_0 (= x_1) \notin X'$$

__Es__ $X = (1, 2)$



$X' = [1, 2]$

__Lemma__ Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X'$.
Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\{x \in X : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$ è infinito



Esempio $\mathbb{N}' = \emptyset$

Se considero $x_0 \in \mathbb{R}$ e se fosse $x_0 \in \mathbb{N}'$ avrei che

$\forall\, 1 > \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < |x_0 - n| < \varepsilon$

Dal lemma precedente risulterebbe che

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : 0 < |x_0 - n| < 1\} = +\infty .$$

Ma sappiamo $\operatorname{card}\, [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathbb{N} \leq 3$

Es $\mathbb{Z}' = \emptyset$

<u>Esempio</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$. ~~Sia~~

$$S = \sup X$$
$$s = \inf X .$$

Se $S < +\infty$ e $S \notin X$ allora

$S \in X'$

Se $s > -\infty$ e $s \notin X$ allora $s \in X'$.

<u>Esempio</u> $(0,2)$, $\inf(0,2) = 0 \in (0,2)' =$
$= [0,2]$

$\sup(0,2) = 2 \in (0,2)' = [0,2]$.

<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice un insieme chiuso (in $\mathbb{R}$)
se $X' \subseteq X$.

In generale la <u>chiusura</u> di un $X \subseteq \mathbb{R}$
viene denotato con $\overline{X}$ ed è $\overline{X} = X \cup X'$.
In particolare X è chiuso se e solo se $X = \overline{X}$

<u>Es</u> $\mathbb{N}$ è chiuso. $\mathbb{N}' = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \emptyset = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \overline{\mathbb{N}}$.

$\mathbb{Z}$ è chiuso

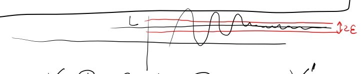
$\mathbb{Q}$ non è chiuso

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Ricordiamo

Def Se $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ ed $L \in \mathbb{R}$, e se $f: X \to \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se

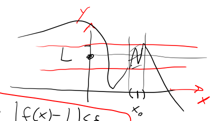
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; M_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$



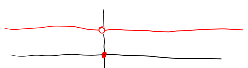
Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ ed $L \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$



Es 1 Se
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$



Qui notare che $\forall x \neq 0$ ho $0 = |f(x) - 1|$ ✓

Pertanto $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \text{scelto } \delta_\varepsilon = 1 \text{ ho} \qquad \text{ho} \\ 0 < |x - 0| = |x| < \delta_\varepsilon = 1 \Rightarrow 0 = |\overset{1}{f(x)} - 1| < \varepsilon \end{array}}$$

Def Nel caso particolare in cui nella precedente definizione si ha $x_0 \in X \cap X'$ con $L = f(x_0)$, cioè se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, si dice che

f è continua nel punto x_0.

Def Notare che se $X \subseteq \mathbb{R}$ si può scrivere

$$X = (X \cap X') \cup (X \cap CX') \quad (1)$$

dove $CX' = \mathbb{R} \setminus X' = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \notin X'\}$

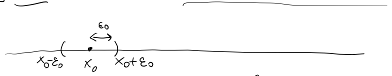
$$\left(X = (X \cap A) \cup (X \cap CA) \right)$$

I punti di $X \cap CX'$ vengono detti punti "isolati di X"

Uno $x_0 \in X \cap CX'$ (che chiamo punto isolato), non è un punto di accumulazione di X non vale

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \varepsilon} \quad (1)$$

$\exists \; \varepsilon_0 > 0$ t.c. $|x - x_0| \geq \varepsilon_0 \; \forall x \in X$ con $x \neq x_0$



$$(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \cap X = \{x_0\}.$$

Def Diremo che dati $f: X \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in X$ isolato, f è ~~sempre~~ continua in x_0.

Es 1 $X = \{1, 2, 3\}$

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad$ f è continua in tutti i punti di X.

Def Sia $f: \overset{\subseteq \mathbb{R}}{X} \to \mathbb{R}$. Se f è continua in ogni punto di X diremo che f è continua in X. Denoteremo con $C^0(X)$ l'insieme delle $f: X \to \mathbb{R}$ che sono continue in X.

Esempio La funzione $x \in C^0(\mathbb{R})$.

Si tratta di dimostrare che $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

cioè che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon.}$$

La frase è vera se prendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$.

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x}\right)=\ ?$$

Qui $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+1}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{\frac{2}{3}}}_{+\infty}\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{3}}}_{\to 1}$$

$\forall\, \alpha>0$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$$

$$\boxed{\forall\, K>0\ \exists\, M_K>0 \text{ t.c. } x>M_K\Rightarrow x^{\alpha}>K}$$

$x>0$ e

$x^{\alpha}>K$

$\Updownarrow$

$x>K^{\frac{1}{\alpha}}$

Innalzo alla potenza $\frac{1}{\alpha}$. Qui basta prendere

$$M_K=K^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\left(\overbrace{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}^{a}-\overbrace{(x^2+x)^{\frac{1}{3}}}^{b}\right)\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{(\cancel{x^2}+1)-(\cancel{x^2}+x)}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{-x+1}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x)^{\frac{2}{3}}}$$