ROTAZIONI in 2 dimensioni

Le rotazioni su un piano sono date dalle matrici

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) dipendono da un parametro reale α ;

b) soddisfano la relazione $R(\alpha)^T R(\alpha) = R(\alpha) R(\alpha)^T = \mathbb{1}_2$

c) dato un vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ il suo trasformato sotto rotazioni è

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

d) le rotazioni formano un gruppo detto $SO(2)$.

(+) Vedi ultima pagina

La proprietà b) è equivalente a dire che la norma del vettore è invariante sotto rotazioni del vettore:

$$\|\bar{v}\|^2 = \bar{v}^T \bar{v} \longmapsto (R\bar{v})^T \cdot (R\bar{v}) = \bar{v}^T \cdot R^T R \bar{v} = \bar{v}^T \bar{v} .$$

Infatti le ROTAZIONI sono definite come quelle trasformazioni sui vettori che preservano la norma e hanno determinante unitario (per distinguerle da simmetrie assiali).

$$\rightarrow \; SO(2) = \{ R \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1} \, , \; \det R = 1 \}$$

(Rilassando condizione $\det R = 1$, ho gruppo $O(2)$.)

- Il gruppo $SO(2)$ è uno spazio che può essere parametrizzato da una variabile reale α come

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

funz. cont. e diff. in α

ed è t.c. $g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) = g(\alpha_1+\alpha_2)$, $g(\alpha)^{-1} = g(-\alpha)$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha_1), g(\alpha_2) \longmapsto g(\alpha_1+\alpha_2) \qquad g(\alpha) \mapsto g(-\alpha)$$

sono funz. continue e infinitam. differenziabili.

- Inoltre $SO(2) \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_i \in \mathbb{R}\ i=1,\dots,4 \right\} \cong \mathbb{R}^4$

Gli elementi di $SO(2)$ sono tali che

$\det O = 1 \longleftrightarrow x_1x_4 - x_2x_3 = 1$

$O^{-1} = O^T \longleftrightarrow \frac{1}{x_1x_4-x_2x_3}\begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$

cioè $SO(2) \subset \mathbb{R}^4$ t.c. $\begin{array}{l} x_4 = x_1 \\ x_3 = -x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array} \longrightarrow$ CERCHIO di raggio unit.

$\rightsquigarrow$ $SO(2)$ è una varietà (differenziabile) immersa in $\mathbb{R}^4$

la sua parametrizzazione è già detta sopra: $\begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ x_2 = -\operatorname{sen}\theta \\ x_3 = \operatorname{sen}\theta \\ x_4 = \cos\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi[$

Un gruppo che è anche una varietà differenziabile con le operazioni di gruppo (prodotto e inverso) che siano C^∞ è detto un **GRUPPO DI LIE** !

Rotazioni in dimensioni generiche

Se ho uno sp. vett. n-dim. isomorfo a $\mathbb{R}^n$, le rotazioni sono date dalle matrici $n \times n$ che preservano la norma e hanno $\det = 1$.

$$SO(n) = \left\{ R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; R^T R = \mathbb{1} \,,\; \det R = 1 \right\}$$

$\rightarrow$ Anche $SO(n)$ può essere parametrizzato da variabili continue

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in SO(n) \qquad d = \frac{n(n-1)}{2}$$

Rotazioni infinitesime e generatori di SO(n)

$g(0) = \mathbb{1} \in SO(n)$; siccome $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ è funz. continua, ci sono trasf. infinitesimamente vicine all'identità.

Consideriamo

$$R = \mathbb{1} + \Omega + O(\Omega^2) \quad \text{con} \quad \Omega_{ij} \ll 1$$

Che proprietà deve avere Ω affinché R sia una rotazione infinitesimamente vicina a $\mathbb{1}$ (detta ROTAZ. INFINITESIMA)?

$$\mathbb{1} \overset{!}{=} R^T R = (\mathbb{1} + \Omega^T + \dots)(\mathbb{1} + \Omega + \dots) = \mathbb{1} + \Omega^T + \Omega + O(\Omega^2)$$

$$\Rightarrow \quad \Omega + \Omega^T = 0 \qquad \text{cioè} \quad \Omega \text{ è matrice ANTISIMMETRICA}$$

a meno di ordini successivi

Es. $SO(2)$: prendiamo angolo $\epsilon \ll 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\operatorname{sen}\epsilon \\ \operatorname{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon^2/2 + \dots & -\epsilon + \dots \\ \epsilon + \dots & 1 - \epsilon^2/2 + \dots \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimmetrica}} + O(\epsilon^2)$$

Ora, prendiamo la matrice antisimmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ed esponenziamola

$$\exp A = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad E \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A^2 = -\alpha^2 \mathbb{1}$, $A^3 = -\alpha^2 \mathbb{1} \cdot \alpha E = -\alpha^3 E$,

$$A^{2m} = (A^2)^m = (-1)^m \alpha^{2m} \mathbb{1} \qquad A^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m+1} E$$

$$\exp A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!} = \mathbb{1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m)!} + E \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= \cos\alpha \, \mathbb{1} + \operatorname{sen}\alpha \, E = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Cioè l'esponenziale della matrice infinitesima antisimm. è la matrice di rotazione. In effetti, ogni matrice di $SO(2)$ si può scrivere come $\exp(\alpha E)$.

"E" si dice GENERATORE di $SO(2)$.

Notiamo infine che se $\alpha = \alpha(t)$ con $\alpha(0) = 0$: (curva sul cerchio)

$$\left.\frac{d}{dt} g(\alpha)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha}(0) \leftarrow \text{matrice antisimmetrica!}$$

Qto si generalizza a $SO(n)$: ogni matrice di $SO(n)$ si può scrivere come

$$R = \exp(\Omega) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \underset{\text{parametri}}{\omega_i} \, E_i\Big)$$

E_i: base di matrici antisimm. $\rightsquigarrow$ generatori di $SO(n)$

qto è consistente col fatto che se $\Omega_{ij} \ll 1$, allora $R = \exp(\Omega) \sim \mathbb{1} + \Omega$.

SU(2)

- $SU(2)$ è il gruppo delle matrici 2×2 unitarie e con determinante uguale a 1.

- $SU(2) \subset M_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \middle| z_i \in \mathbb{C} \ i=1,2,3,4 \right\} \subset \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$

$$\begin{array}{l} \det U = 1 \\ U^{-1} = U^{+} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1 \\ \frac{1}{\det U}\begin{pmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightarrow \underbrace{z_4 = z_1^*, \ z_3 = -z_2^*}_{\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^4}, \quad \underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1}_{\mathrm{Re}z_1^2 + \mathrm{Im}z_1^2 + \mathrm{Re}z_2^2 + \mathrm{Im}z_2^2 = 1}$$

$$\underline{\underline{S^3}} \subset \mathbb{R}^4$$

Anche $SU(2)$ ha la struttura di una varietà differenziabile.

$$U \in SU(2) \quad \text{t.c.} \quad U = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \qquad (\circ)$$

$$\text{con} \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1$$

- L'insieme delle matrici della forma $(\circ)$ con det generico è uno sp. vett. isomorfo a $\mathbb{R}^4$.

Quindi $SU(2)$ è una sottovarietà dello sp. vettoriale delle matrici del tipo $(\circ)$.

[In particolare è allora ben definita una distanza fra pti $\rightsquigarrow$ derivate.]

- Una parametrizzazione di $SU(2)$ è data da una scelta di coordinate in S^3 immersa in $\mathbb{R}^4$

$$x_i = x_i(\underbrace{q_1, q_2, q_3}_{\substack{\text{coord. locali} \\ \text{su } SU(2)}})$$

Possiamo usare coordinate STEREOGRAFICHE, per es.,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-q^2}{1+q^2} \\ x_2 = \dfrac{2q_1}{1+q^2} \\ x_3 = \dfrac{2q_2}{1+q^2} \\ x_4 = \dfrac{2q_3}{1+q^2} \end{cases}$$

$$q^2 \equiv q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

Nota: tutti i pti così def. soddisfano $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1$.

→ L'identità è in $\bar{q} = (0,0,0)$

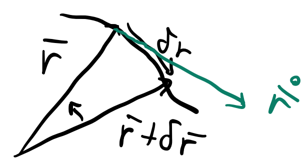
[In realtà resta escluso il polo SUD a $\bar{x} = (-1,0,0,0)$; qto perchè la scelta di coord. è locale e qla fatta vale sull'aperto che esclude il polo sud. C'è bisogno di un'altra carta (che escluderà il polo NORD): essa ha stessa forma sopra ma con $x_1 = \dfrac{q'^2-1}{q'^2+1}$.
Il cambio di coord. all'intersezione delle due carte è ricavato considerando che le due parametrizzaz. sono ottenute con opposta proiez. stereografica.]

- Una curva su $S^3 \simeq SU(2)$ è data dalla scelta di tre funz. $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q(t)) \qquad \bar{r} \in \mathbb{R}^4$$

- Posso definire un vettore tangente a pto curva nel pto $\bar{r}(0)$:

$$\frac{d}{dt}\bar{r}(t)\Big|_{t=0} = \sum_i \dot{q}_i(0)\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$$



- Per ogni curva che passa per il pto P dato da $\bar{r}(0)$, ho un vettore tangente; l'insieme di qti vettori forma uno SPAZIO VETTORIALE detto SPAZIO TANGENTE T_pM (in qto caso T_pS^3).

- Se $M = G$ è un gruppo di Lie, lo sp. vettoriale $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$ è chiamato l' ALGEBRA di Lie associata a G!

- Per $SU(2)$ $A \equiv \frac{dU}{dt}\Big|_{t=0}$ è ancora una MATRICE.

- Vediamo che tipo di matrice è:

Prendiamo una curva che passa per l'identità $\bar{r} = (1,0,0,0)$

Tutte le matrici appartenenti alla curva $U(t)$ sono t.c.

1) $U(t)\,U^{+}(t) = \mathbb{1}$ e 2) $\det U = 1$

1) Derivo in t e pongo $t=0$:

$$\left(\frac{dU}{dt}U^\dagger + U\frac{dU^\dagger}{dt}\right)\Big|_{t=0} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dU}{dt}\Big|_{t=0}\cdot \mathbb{1} + \mathbb{1}\left(\frac{dU}{dt}\Big|_{t=0}\right)^\dagger = 0$$

$$\Rightarrow \quad A + A^\dagger = 0 \quad \Rightarrow \quad A$$, cioè vett. tg a $SU(2)$ in $\mathbb{1}$, è una MATRICE ANTI-HERMITIANA

2) Usiamo $\frac{d}{dt}(\det U)\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}\left(M_U^T \frac{dU}{dt}\right)\Big|_{t=0}$ $(\neq)$ $\quad M_U^T\big|_{t=0}$ è matrice minori di $\mathbb{1}$, cioè $\mathbb{1}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathrm{tr}\, A.$$

$\ulcorner(\neq)$ $\det U = U_{i1}M_{i1} + U_{i2}M_{i2} + U_{i3}M_{i3} + \dots$

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \cdots \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \cdots \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove i è arbitrario e M_{ij} è matrice dei minori (con segno opportuno)

$$\Rightarrow \det U = \sum_j U_{ij} M^T_{ji} \quad \text{con } i \text{ scelto arbitrariam.}$$

Calcoliamo differenziale di $\det U$

$$d(\det U) = \sum_{h,k} \frac{\partial(\det U)}{\partial U_{hk}} dU_{hk}$$

scegliamo $i=h$ qndo deriviamo in $U_{h\dots}$

$$\frac{\partial}{\partial U_{hk}}(\det U) = \frac{\partial}{\partial U_{hk}} \sum_j U_{hj} M^T_{jh}$$

non dipende da U_{hk}

$$= \sum_j \frac{\partial U_{hj}}{\partial U_{hk}} M^T_{jh} = M^T_{kh}$$

$$\Rightarrow d(\det U) = \sum_{h,k} M^T_{kh}\, dU_{hk} = \mathrm{tr}(M^T dU)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\det U) = \mathrm{tr}\left(M^T \frac{dU}{dt}\right) \quad \lrcorner$$

1), 2) $\Rightarrow$ $T_{\mathbb{1}} SU(2) \subseteq HM_3^{trl} = \{$ matrici 2×2 anti-herm a traccia nulla $\}$

$T_{\mathbb{1}} SU(2)$: sp. vett. di dim. 3

HM_3^{trl}: sp. vett. di dim 3 (*)

$$\Rightarrow \quad T_{\mathbb{1}} SU(2) = HM_3^{trl}$$

(*) : $A \in HM_3^{trl} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ t.c.

$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & -a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, cioè $a^* = a$, $c = b^*$

$\Rightarrow$ tre parametri

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow HM_3^{trl} \cong \mathbb{R}^3 .$$

Lo spazio $T_{\mathbb{1}} SU(2)$ non è solo uno sp. vettoriale; esso è anche chiuso(•) rispetto al commutatore

$$[\,,\,] : T_{\mathbb{1}} SU(2) \times T_{\mathbb{1}} SU(2) \longrightarrow T_{\mathbb{1}} SU(2)$$
$$(A, B) \longmapsto [A, B] \equiv \underbrace{AB}_{\text{mol. definito fra matrici}} - BA$$

(•) Infatti $[A,B]^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger \underset{A,B \in T_{\mathbb{1}} SU(2)}{=} BA - AB = -[A,B]$.

Il commutatore è un PRODOTTO BILINEARE e ANTISIMMETRICO che soddisfa l'identità di Jacobi(~)

$\rightsquigarrow T_{\mathbb{1}} SU(2)$ ha la struttura di ALGEBRA DI LIE

(~) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$

Possiamo prendere una base per $T_{\mathbb{1}} SU(2)$, scegliendo per esempio $i\frac{\sigma^a}{2}$ $a=1,2,3$ dove σ^a sono le MATRICI DI PAULI

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora $A \in T_{\mathbb{1}} SU(2)$ è t.c.

$$A = i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}$$

$\frac{\sigma^a}{2}$ ← detti GENERATORI dell'algebra

Se conosciamo il COMMUTATORE dei generatori, possiamo calcolarci commut. di ogni elem. dell'alg (comm. è bilineare)

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right] = i\epsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2}$$

(Per matr. Pauli: $\sigma^a\sigma^b = i\epsilon^{abc}\sigma^c + \delta^{ab}\mathbb{1}$)

↑ "costanti di struttura" dell'alg. di $SU(2)$

Ora calcoliamo $\exp A$

$$\exp A = \exp\left(i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\alpha^a\sigma^a}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

$$(\alpha^a\sigma^a)^2 = \alpha^a\alpha^b\sigma^a\sigma^b = \alpha^a\alpha^b\left(\cancel{i\epsilon^{abc}\sigma^c} + \delta^{ab}\mathbb{1}\right)$$

$$= |\alpha|^2\,\mathbb{1}$$

$$\exp A = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^{2m}\cdot\mathbb{1} + i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^{2m+1}\frac{\alpha^a\sigma^a}{|\alpha|}$$

$$= \cos\frac{|\alpha|}{2}\, \mathbb{1} + i \,\text{sen}\frac{|\alpha|}{2}\, \frac{\alpha^a \sigma^a}{|\alpha|}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{|\alpha|}{2} + i \frac{\alpha^3}{|\alpha|}\text{sen}\frac{|\alpha|}{2} & \frac{\alpha^2 - i\alpha^1}{|\alpha|}\text{sen}\frac{|\alpha|}{2} \\ -\frac{\alpha^2 + i\alpha^1}{|\alpha|}\text{sen}\frac{|\alpha|}{2} & \cos\frac{|\alpha|}{2} - i\frac{\alpha^3}{|\alpha|}\text{sen}\frac{|\alpha|}{2} \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\rightarrow$ è una matrice di $SU(2)$

(in una parametrizzazione coi parametri $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$)

$$\left[\cos^2\frac{|\alpha|}{2} + \left(\frac{(\alpha^3)^2}{|\alpha|^2} + \frac{(\alpha^1)^2}{|\alpha|^2} + \frac{(\alpha^2)^2}{|\alpha|^2} \right) \text{sen}^2\frac{|\alpha|}{2} = 1 \right]$$

Nota: le matrici di $SU(2)$ possono essere parametrizzate nella forma $(*)$, cioè ogni matrice di $SU(2)$ è l'exp di una matrice di $T_{\mathbb{1}}SU(2)$!

$\Rightarrow$ le matrici di $SU(2)$ possono sempre essere parametrizzate come

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = e^{i \underset{\uparrow}{\alpha^a} \frac{\sigma^a}{2}}$$

generatori di $SU(2)$

coordinate su $SU(2)$

- Se $\alpha^a \ll 1$ $\quad a=1,2,3$, posso espandere l'exp:

$$g(\alpha) = \mathbb{1} + i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2} + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha) = \mathbb{1} + \delta g(\alpha) \quad \text{con} \quad \delta g(\alpha) \in \mathfrak{g}$$

- In qta parametrizzazione, una curva su $SU(2)$ passante per $\mathbb{1}$ è data dalle funz. $\alpha^a(t)$ $a=1,2,3$ con $\alpha^a(0)=0$. Il vett. tg è dato da:

$$\frac{d\,g(\alpha(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = i\frac{\sigma^a}{2}\dot{\alpha}^a(t)\, e^{i\alpha^a(t)\frac{\sigma^a}{2}}\bigg|_{t=0} = i\frac{\sigma^a}{2}\dot{\alpha}^a(0)$$

è una matrice antiHermitiana a mano nulla

Per generiche curve $\alpha(t)$ copro tutto lo spazio vett. delle matrici antihermitiane traceless.

- Possiamo arrivarci anche dalle trasformazioni infinitesime, sapendo che $g \sim \mathbb{1} + A$ $\quad A \in \mathfrak{g}$ $\quad A_{ij} \ll 1$

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1}+A)^\dagger(\mathbb{1}+A) = \mathbb{1} + A + A^\dagger + O(A_{ij}^2)$$

$$\Rightarrow \quad A^\dagger = -A.$$

SO(3)

- SO(3) è il GRUPPO delle matrici ORTOGONALI a $\det = 1$.

- $SO(3) = \{ O \in M_3(\mathbb{R}) \mid OO^T = O^T O = \mathbb{1} \text{ e } \det O = 1 \}$

  $\rightsquigarrow$ cioè sono matrici che lasciano inv. il prodotto scalare e con $\det = 1$

  ↳ "gruppo proprio delle rotaz."

[Se rilassiamo cond. $\det = 1$, abbiamo $O(3)$.
La cond. $OO^T = \mathbb{1} \Rightarrow \det O = \pm 1 \Rightarrow O(3)$ è disconnesso
e $SO(3)$ è una sua componente connessa.]

$SO(3) \subset M_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$

cioè è una sottovarietà di uno sp. vett. data dalle condizioni

$$\begin{cases} O^{-1} = O^T & \leftarrow \text{6 condizioni sulle entries di } O \\ \det O = 1 & \leftarrow \text{seleziona una delle comp. connesse} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ci bastano 3 parametri per descrivere SO(3)

$\rightsquigarrow$ SO(3) è una varietà 3dim (proprio come SU(2))

Possiamo parametrizzare $SO(3)$ con gli angoli di Eulero.

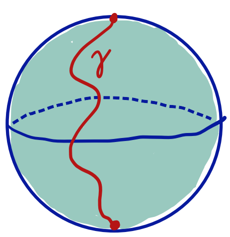
Alternativamente può essere parametrizzato dalla scelta di un asse $\hat{n}$ (2 param) e un angolo ξ (1 param).

Topologia di $SO(3)$:

- Usiamo la seconda parametrizzazione $\hat{n} \in S^2$ & $\xi \in [0, 2\pi[$
- Abbiamo l'identificazione $g(\hat{n}, \xi) = g(-\hat{n}, 2\pi - \xi)$
- Possiamo quindi restringere il dominio dell'angolo $\xi \in [0, \pi[$

  $\Rightarrow$ $SO(3)$ è qndi isomorfo a una SFERA SOLIDA di raggio π, dove i pti antipodali sono identificati $[\ g(\hat{n}, \pi) = g(-\hat{n}, \pi)\ ]$

  $\Rightarrow$ $SO(3)$ NON è semplicem. connesso:



γ è cammino chiuso in $SO(3)$ che NON è contraibile.

Qta è una DIFFERENZA rispetto a $SU(2) \cong S^3$ che è sempl. connesso! I due gruppi sono varietà distinte.

Vediamo ora $T_{\mathbb{1}} SO(3)$:

- Prendiamo una curva generica $O(t)$; essa deve soddisfare

$$O(t)\, O(t)^T = \mathbb{1} \xrightarrow[\text{deriv. in } t=0]{} \left(\frac{d}{dt} O(t)\, O(t)^T + O(t) \frac{dO^T(t)}{dt} \right)\Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \quad A + A^T = 0 \qquad \text{dove} \quad A = \frac{dO}{dt}\Big|_{t=0} \text{ è il vett. tg.}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. vett. dim}=3}}{T_{\mathbb{1}} SO(3)} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. vett. dim}=3}}{AM_3(\mathbb{R})} = \{\text{matrici } 3\times 3 \text{ antisimmetriche}\}$$

- Scegliamo tre curve particolari (rotaz. attorno assi cartesiani)

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo i loro vett. tg in $t=0$ ($\mathbb{1}$)

$$E_1 \equiv \dot\gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$(E_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$$

$$E_2 \equiv \dot\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \equiv \dot\gamma_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo che E_1, E_2, E_3 sono indip. e quindi formano una base per $T_{\mathbb{1}} SO(3)$. Inoltre essi sono manifestam. una base per le matrici antisimm.

→ Si dice che l' alg. di Lie di $SO(3)$ è lo sp. vett. delle matrici antisimm. dotate del commutatore.

Calcolando il commutatore degli elem. della base si ottiene

$$[E_i, E_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} E_k$$

Dim. $(E_i E_j)_{mn} = \sum_p (E_i)_{mp} (E_j)_{pn} = \sum_p \epsilon_{imp} \epsilon_{jpn} =$

$$= -\sum_p \epsilon_{imp} \epsilon_{jnp} = -(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj})$$

$$(E_i E_j - E_j E_i)_{mn} = (-\cancel{\delta_{ij}\delta_{mn}} + \delta_{in}\delta_{mj} + \cancel{\delta_{ji}\delta_{mn}} - \delta_{jn}\delta_{mi})$$

$$\delta_{in}\delta_{mj} - \delta_{jn}\delta_{mi} = \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{nmk} = \sum_k \epsilon_{ijk} (\underset{(E_k)_{mn}}{\underset{\parallel}{-\epsilon_{kmn}}}) \quad //$$

Cioè E_i $i = 1,2,3$ e $-i\frac{\sigma^a}{2}$ $a = 1,2,3$ hanno le stesse regole di commutazione!

Questo vuol dire che $T_{\mathbb{1}} SO(3)$ e $T_{\mathbb{1}} SU(2)$ sono due sp. vett. isomorfi con le stesse COSTANTI DI STRUTTURA $\Rightarrow$ $T_{\mathbb{1}} SO(3) \cong T_{\mathbb{1}} SU(2)$ come ALG. di LIE.

Per qto si dice che SO(3) e SU(2) HANNO LA STESSA ALGEBRA DI LIE, nonostante siano due gruppi di Lie DIVERSI.

Che relazione intercorre tra i due gruppi di Lie?

Prendiamo $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha E_3$

e facciamo exp

$$\exp A = \cos\alpha\, \mathbb{1} + \operatorname{sen}\alpha\, E_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in SO(3)}$$

(Abbiamo usato che $(\alpha E_3)^2 = -\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ come sopra per so(2).)

Ma abbiamo anche che

$$\alpha E_3 \longleftrightarrow -i\alpha \frac{\sigma^3}{2}$$

Qti elementi dell'alg. di Lie $T_{\mathbb{1}} SO(3) \cong T_{\mathbb{1}} SU(2)$ individuano un sottogruppo a un param. di SO(3).

Prendiamo $\alpha = 2\pi$

$\exp(2\pi E_3) = \mathbb{1}_3 \leftarrow$ Id. di SO(3)

$\exp\left(i2\pi \frac{\sigma^3}{2}\right) = -\mathbb{1}_2 \longleftarrow \neq$ Id. di SU(2)

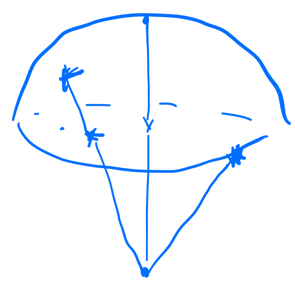
In generale α e $\alpha + 2\pi$ danno lo stesso elem. in $SO(3)$, ma due elem. distinti in $SU(2)$.

Lungo qta linea si può dimostrare che

$$\boxed{SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2}$$ come gruppo.

Topologicamente $SU(2)$ è S^3.

L'emisfero NORD di S^3 ha come bordo l'S^2 equatoriale. L'emisfero NORD è in relaz. 1 a 1 con la sfera solida contenuta in S^2 (proiez. stereografica)



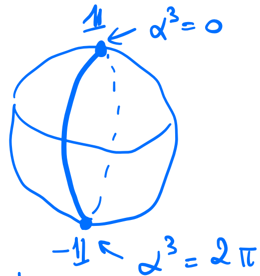
La stessa proiez. mappa l'emisfero sud nella parte di $\mathbb{R}^3$ esterna a S^2 (con ∞ identificato a un pto)

Facendo $S^3/\mathbb{Z}_2$ con $\mathbb{Z}_2$ mappa antipodale, ottengo un emisfero con pti antipodali sul bordo S^2 identificati, cioè ottengo $SO(3)$!

Prendiamo la curva coordinata lungo α^3

In $SU(2)$:
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{|\alpha^3|}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{|\alpha^3|}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{|\alpha^3|}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{|\alpha^3|}{2} \end{pmatrix}$$

Vediamo che questa curva è un cerchio di lunghezza 4π



In $SO(3)$:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha^3 & -\mathrm{sen}\,\alpha^3 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha^3 & \cos\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa curva è ancora un cerchio ma di lungh. 2π

$$(\hat{n}, \xi) = (\underbrace{\hat{n}}_{\text{fissato}}, \underbrace{\alpha^3}_{\downarrow\,]-\pi,\pi[})$$

Vediamo che lo $\mathbb{Z}_2$ è proprio la mappa antipodale che lega $SO(3)$ e $SU(2)$