

Esercizi - foglio 3

Esercizio 1. Verificare usando la definizione la crescenza o la decrescenza delle seguenti funzioni:

- a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x - 1$ crescente;
- b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -2x + 1$ decrescente;
- c. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = x^2$ crescente;
- d. $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = x^2$ decrescente.

Esercizio 2. Usando le definizioni opportune, dare le motivazioni per cui la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ non è né crescente né decrescente.

Esercizio 3. Dire se le seguenti funzioni sono limitate inferiormente o superiormente:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$
- b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -\frac{1}{x^4}$
- c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{|x|}$
- d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sin(x) + 2$
- e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x + 2$

Esercizio 4. Risolvere le seguenti disequazioni:

- a) $\left| \frac{x-1}{x-7} \right| > 1$
- b) $\frac{3 - |x+5|}{|x-4|} \leq 0$
- c) $\sqrt{2-x^2} > 2x - 1$
- d) $3x - 1 > \sqrt{9x^2 - 42x + 40}$
- e) $\sqrt{2x-5} > \sqrt{x-2}$
- f) $\sqrt[3]{8x^3 - 7} > 2x - 1$
- g) $e^{2x} - 3 > 0$
- h) $\log(x+1) - \log(x) \leq 1$
- i) $\log_5 x < \log_7 x$
- j) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x + 1 \geq 0$
- m) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$
- n) $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$

Esercizio 5. Sia f la funzione $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x+1}$, verificare che f è iniettiva.

Esercizio 6. Sia f la funzione $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \log(x+1)$, verificare che f è suriettiva.

Esercizio 7. Sia f la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = e^{2x}$, verificare che f è invertibile e calcolarne l'inversa.

Esercizio 8. Date le funzioni:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = e^x$$

verificare se esistono $f \circ g$ e $g \circ f$ e in caso positivo calcolarne la composta.

Esercizio 9. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2 - 7x + 10}$ | b) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+3}}$ | d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ |
| e) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 3x + 5}$ | f) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x)$ |
| g) $f(x) = \log(x - \sqrt{1 - x^2})$ | h) $f(x) = \log_{10}(\log_{10}(x+3))$ |
| i) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3)$ | l) $f(x) = \sqrt{ x+1 - 2x-4 }$ |

Esercizio 10. Calcolare il periodo delle seguenti funzioni:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ | b) $f(x) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ |
| c) $f(x) = \operatorname{tg}(4x) + 3$ | d) $f(x) = \operatorname{cotg}(\pi x) + 1$ |

Esercizio 11. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$a) f(x) = \operatorname{sen}x + |x| \quad b) f(x) = \operatorname{cotg}x + x^3$$

$$c) f(x) = \cos x + 1 \quad d) f(x) = e^{|x|} + 1$$

$$e) f(x) = e^x + x \quad f) f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$$

Esercizio 12. Per ognuna delle seguenti funzioni si individuino un dominio ed un codominio affinchè la funzione sia invertibile.

$$a) f(x) = \operatorname{sen}(2x) \quad b) f(x) = \cos(x + \pi) \quad c) f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}x$$

Esercizio 13. Tenendo conto dei grafici delle funzioni elementari e usando opportunamente le trasformazioni elementari disegnare i grafici delle seguenti funzioni. Verificare in particolare se sono crescenti o decrescenti, limitate o illimitate (sia superiormente che inferiormente), iniettive o suriettive (supponendo come dominio quello massimale e come codominio \mathbb{R}).

$$a) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad b) f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$c) f(x) = x^3 + 2 \quad d) f(x) = \sqrt[3]{x+5}$$

$$e) f(x) = \log(x+2) \quad f) f(x) = e^{x+1}$$

$$g) f(x) = 5 - x^8 \quad h) f(x) = \operatorname{sen}x - 1$$

$$i) f(x) = |x| - 1 \quad l) f(x) = -\sqrt{x+5}$$