

Esercizi - foglio 3

Esercizio 1. Verificare usando la definizione la crescenza o la decrescenza delle seguenti funzioni:

- a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x - 1$ crescente;
- b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -2x + 1$ decrescente;
- c. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2$ crescente;
- d. $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2$ decrescente.

Esercizio 2. Usando le definizioni opportune, dare le motivazioni per cui la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ non è né crescente né decrescente.

Esercizio 3. Dire se le seguenti funzioni sono limitate inferiormente o superiormente:

- a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$
- b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -\frac{1}{x^4}$
- c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$
- d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) + 2$
- e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x + 2$

Esercizio 4. Risolvere le seguenti disequazioni:

- a) $\left| \frac{x-1}{x-7} \right| > 1$
- b) $\frac{3-|x+5|}{|x-4|} \leq 0$
- c) $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$
- d) $3x-1 > \sqrt{9x^2-42x+40}$
- e) $\sqrt{2x-5} > \sqrt{x-2}$
- f) $\sqrt[3]{8x^3-7} > 2x-1$
- g) $e^{2x} - 3 > 0$
- h) $\log(x+1) - \log(x) \leq 1$
- i) $\log_5 x < \log_7 x$
- l) $\log_{\frac{1}{2}} x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x + 1 \geq 0$
- m) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$
- n) $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$

Esercizio 5. Sia f la funzione $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x+1}$, verificare che f è iniettiva.

Esercizio 6. Sia f la funzione $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \log(x+1)$, verificare che f è suriettiva.

Esercizio 7. Sia f la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = e^{2x}$, verificare che f è invertibile e calcolarne l'inversa.

Esercizio 8. Date le funzioni:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = e^x$$

verificare se esistono $f \circ g$ e $g \circ f$ e in caso positivo calcolarne la composta.

Esercizio 9. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x+5}{x^2-7x+10} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} \quad \text{d) } f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt{-2x^2+3x+5} \quad \text{f) } f(x) = \log_{10}(x^2-5x)$$

$$\text{g) } f(x) = \log(x - \sqrt{1-x^2}) \quad \text{h) } f(x) = \log_{10}(\log_{10}(x+3))$$

$$\text{i) } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3) \quad \text{l) } f(x) = \sqrt{|x+1| - |2x-4|}$$

Esercizio 10. Calcolare il periodo delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = \sin \frac{x}{2} \quad \text{b) } f(x) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{c) } f(x) = \operatorname{tg}(4x) + 3 \quad \text{d) } f(x) = \operatorname{cotg}(\pi x) + 1$$

Esercizio 11. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{sen} x + |x| \quad \text{b) } f(x) = \operatorname{cotg} x + x^3$$

$$\text{c) } f(x) = \cos x + 1 \quad \text{d) } f(x) = e^{|x|} + 1$$

$$\text{e) } f(x) = e^x + x \quad \text{f) } f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$$

Esercizio 12. Per ognuna delle seguenti funzioni si individuino un dominio ed un codominio affinché la funzione sia invertibile.

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \text{b) } f(x) = \cos(x + \pi) \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

Esercizio 13. Tenendo conto dei grafici delle funzioni elementari e usando opportunamente le trasformazioni elementari disegnare i grafici delle seguenti funzioni. Verificare in particolare se sono crescenti o decrescenti, limitate o illimitate (sia superiormente che inferiormente), iniettive o suriettive (supponendo come dominio quello massimale e come codominio \mathbb{R}).

$$\text{a) } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{b) } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + 2 \quad \text{d) } f(x) = \sqrt[3]{x+5}$$

$$\text{e) } f(x) = \log(x+2) \quad \text{f) } f(x) = e^{x+1}$$

$$\text{g) } f(x) = 5 - x^8 \quad \text{h) } f(x) = \operatorname{sen} x - 1$$

$$\text{i) } f(x) = |x| - 1 \quad \text{l) } f(x) = -\sqrt{x+5}$$