Matrici

Def: siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; una <u>matrice</u> $m \times n$ a <u>coefficienti reali</u> è una tabella rettangolare con $m \cdot n$ entrate che sono numeri reali, del tipo:

$$\underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m \text{ righe}}_{n \text{ colonne}}$$

dove ciascun a_{ij} è un numero reale ovvero

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

indice di riga   indice di colonna

due matrici sono uguali se hanno lo stesso numero di righe, lo stesso numero di colonne e tutte le loro entrate sono uguali.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi & 5 & 12 & -7 \\ 9 & \sqrt{3} & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{23} = 12 \qquad a_{14} = 4$$

Def: sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ una matrice a coefficienti reali; per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, la i-<u>esima riga</u> di A è la matrice

$$A_{(i)} := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice } 1 \times n$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, la j-<u>esima colonna</u> di A è la matrice

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice } m \times 1$$

Def: una matrice si dice <u>quadrata</u> se il suo numero di righe è uguale al suo numero di colonne.

Esempio: la seguente è una matrice quadrata 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ A_{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Def: dati $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate reali si denota con $M_{m,n}(\mathbb{R})$; l'insieme delle matrici $n \times n$ quadrate a entrate reali si denota con $M_n(\mathbb{R})$

Def: la <u>matrice nulla</u> $m \times n$ è la matrice $m \times n$ le cui entrate sono tutte 0 (con $0 \in \mathbb{R}$); la denotiamo con O

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Introduciamo operazioni tra matrici e tra numeri reali e matrici al fine di dotare $M_{m,n}(\mathbb{R})$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Def: siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la <u>somma</u> di A e B, e la denotiamo $A+B$, come la matrice $m \times n$ la cui entrata ij-esima (ovvero l'entrata di posto ij) è ottenuta nel modo seguente):

se $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$

e definiamo $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

allora l'entrata ij-esima di $A+B$ è c_{ij}.

in altre parole: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+3 \\ 2+3 & -1+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Oss: per ogni $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la matrice nulla $m \times n$ è l'elemento neutro della somma tra matrici $m \times n$.

Oss: data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$, allora la matrice $(-a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$ è l'opposto di A rispetto alla somma ed è denotata $-A$.

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo la matrice $\lambda \cdot A$ come la matrice $m \times n$ nella maniera seguente: se $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$, allora

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$$

moltiplicazione di un numero reale per una matrice   moltiplicazione tra numeri reali

Prop: l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con le operazioni qui sopra definite è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Dim: per esercizio.

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\lambda = -2$, allora

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideriamo quattro particolari matrici 2×2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la seguente <u>combinazione lineare</u> di queste quattro matrici:

$$3 \cdot E + F - 2G + 4H =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Questa costruzione si può ripetere per qualsiasi $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$:

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1,2\}$ $\forall j \in \{1,2\}$

allora $A = a_{11} \cdot E + a_{12} \cdot F + a_{21} \cdot G + a_{22} \cdot H$

Riassumiamo questo dicendo che ogni matrice 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$ si può scrivere come combinazione lineare delle matrici E, F, G, H con opportuni coefficienti. Per questo motivo diciamo che E, F, G, H sono un <u>sistema di generatori</u> di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Notiamo che questo argomento può essere ripetuto anche per matrici $m \times n$.

Prop: consideriamo in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme $\mathcal{B} \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici che hanno tutte le entrate nulle eccetto esattamente una, la quale è uguale a 1; allora $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $M_{m,n}(\mathbb{R})$, ovvero ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si può scrivere come combinazione lineare di matrici che appartengono a $\mathcal{B}$.

Ritorniamo alle matrici 2×2. Tutte tali matrici si possono scrivere come combinazione lineare di E, F, G, H; in particolare ciò vale anche per la matrice nulla:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot E + 0 \cdot F + 0 \cdot G + 0 \cdot H.$$

Chiediamoci: esiste un altro modo di scrivere la matrice nulla come combinazione lineare di E, F, G e H, ovvero un modo in cui non tutti i coefficienti siano nulli? Più precisamente, esistono $e, f, g, h \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H \quad ?$$

Cerchiamo di capire quali condizioni su e, f, g, h determinano l'uguaglianza precedente.

$$e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Quindi vale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} e = 0 & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 \end{matrix}$$

perché due matrici 2×2 sono uguali se e solo se tutte le loro entrate sono uguali. Quindi abbiamo dimostrato che l'unico modo di ottenere la matrice nulla come combinazione lineare delle matrici E, F, G e H è quello di scegliere tutti i coefficienti uguali a zero. Per questo motivo le matrici E, F, G, H si dicono <u>linearmente indipendenti</u>.

Oss: le tre matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non sono linearmente indipendenti, infatti:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B + (-1) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il sottoinsieme

$$T_{2,2}(\mathbb{R}) := \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a_{21} = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, ma $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin T_{2,2}(\mathbb{R})$

L'insieme $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali <u>triangolari superiori</u>

Vale che:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$
2. se $A, B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

quindi

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 + 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

pertanto $A + B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$

3. analogamente al punto 2, se $A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\lambda \cdot A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$$

Dunque possiamo concludere che $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Def: una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice <u>diagonale</u>, se posto $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$ allora vale che $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una matrice diagonale,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ non è una matrice diagonale,}$$