Oss: una matrice nulla è diagonale se è quadrata

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la <u>diagonale principale</u> di A

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

diagonale principale

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e scriviamo $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$; definiamo la <u>trasposta</u> di A come quella matrice denotata ${}^tA$ tale che ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ e

$$({}^tA)_{ij} := a_{ji}$$

ij-esima entrata della trasposta di A

entrata ji-esima di A

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

la trasposta si ottiene scambiando le righe con le colonne.

Prop: siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$

Dim: 1. notiamo che

$${}^t(\underbrace{A+B}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$(\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})} + \underbrace{{}^tB}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

ha quindi senso chiedersi se queste due matrici sono uguali, visto che hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

per verificare che le matrici sono uguali, dimostriamo che $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ e $\forall j \in \{1,\dots,m\}$

$$({}^t(A+B))_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij}$$

fissiamo dunque $i \in \{1,\dots,n\}$ e $j \in \{1,\dots,m\}$ e calcoliamo

$$({}^t(A+B))_{ij} = (A+B)_{ji}$$
$$= (A)_{ji} + (B)_{ji}$$

$$({}^tA + {}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij}$$
$$= (A)_{ji} + (B)_{ji}$$

dunque le due quantità sono uguali, e la tesi è dimostrata

2. notiamo che

$${}^t(\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ha quindi senso chiedersi se valga che ${}^t({}^tA) = A$

per mostrare questa uguaglianza mostriamo che

$\forall i \in \{1,\dots,m\}$ e $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

$$({}^t({}^tA))_{ij} = (A)_{ij}.$$

fissiamo $i \in \{1,\dots,m\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$ e calcoliamo

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = (A)_{ij}$$

il che dimostra la tesi $\square$

Oss: in generale, non ha senso chiedersi se $A = {}^tA$ dal momento che in generale tali matrici hanno dimensioni diverse; ha senso chiederselo se A è quadrata.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{per questa matrice vale } A = {}^tA$$

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ovvero A è quadrata); la matrice A si dice <u>simmetrica</u> se vale $A = {}^tA$; la matrice A si dice <u>anti-simmetrica</u> se vale $A = -{}^tA$

Oss: se vale che $A = -{}^tA$, allora $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$(A)_{ii} = (-{}^tA)_{ii} = -({}^tA)_{ii}$$
$$= -(A)_{ii}$$

quindi $(A)_{ii} = -(A)_{ii}$, dunque $(A)_{ii} = 0$;

abbiamo concluso dunque che tutti gli elementi della diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono nulli

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{questa è una matrice antisimmetrica.}$$

Oss: ogni matrice quadrata nulla è sia simmetrica che antisimmetrica.

Oss: se A è simmetrica, allora $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ e $\forall j \in \{1,\dots,n\}$,

$$(A)_{ij} = (A)_{ji}$$

se A è antisimmetrica, allora $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ e $\forall j \in \{1,\dots,n\}$,

$$(A)_{ij} = -(A)_{ji}$$

Andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici:

Consideriamo la situazione:

costo (unitario) della pasta $c_P = 1€$

costo (unitario) del latte $c_L = 2€$

costo (unitario) delle uova $c_U = 3€$

Supponiamo di dover acquistare rispettivamente n_P, n_L ed n_U unità di pasta, latte e uova. Il costo totale sarà:

$$c_P \cdot n_P + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$