Dati vettori e_1, e_2, e_3 e vettori v_1, v_2, v_3, vogliamo calcolare

$$v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + v_3 \cdot e_3$$

Raggruppiamo le due terne di vettori in delle matrici:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 1\times 3} \quad \text{e} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 3\times 1}$$

Definiamo il prodotto:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} := v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + v_3 \cdot e_3$$

Più in generale definiamo il prodotto tra una matrice $1\times n$ e una matrice $n\times 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} := a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

Supponiamo che v^1 sia proporzionale rispetto v^2, $v^1 = c \cdot v^2$ qualche $c \in \mathbb{R}$ fissato. Potremmo quindi considerare i due vettori rispetto a una matrice

$$\begin{pmatrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Ebbene, non avrei definito il prodotto tra

$$\begin{pmatrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Come

$$\begin{pmatrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

Normalmente, definiamo moltiplicando una matrice 2×3 per una 3×1, e otteniamo una matrice 2×1, e abbiamo che:

- l'unica di righe della matrice risultante è uguale al numero di righe della prima matrice
- il numero di colonne della matrice risultante è uguale al numero di colonne della seconda matrice
- il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice.

E ora ci chiediamo: in un mondo ideale, che cosa succede, allora?

$$\begin{pmatrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & c^1_1 \\ e_2 & c^1_2 \\ e_3 & c^1_3 \end{pmatrix} :=$$

$$= \begin{pmatrix} v^1_1 \cdot e_1 + v^1_2 \cdot e_2 + v^1_3 \cdot e_3 & v^1_1 \cdot c^1_1 + v^1_2 \cdot c^1_2 + v^1_3 \cdot c^1_3 \\ v^2_1 \cdot e_1 + v^2_2 \cdot e_2 + v^2_3 \cdot e_3 & v^2_1 \cdot c^1_1 + v^2_2 \cdot c^1_2 + v^2_3 \cdot c^1_3 \end{pmatrix}$$

Definiamo ora il prodotto in generale.

Def: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e sia $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, allora abbiamo il prodotto $A \cdot B$ come il numero (o equivalentemente, una matrice 1×1)

$$A \cdot B := a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

e quindi, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, allora abbiamo il prodotto $A \cdot B$ come quella matrice $m \times n$ le cui entrate del posto ij è data da:

$$(A \cdot B)_{ij} := \underbrace{A_{(i)}}_{\text{i-esima riga di } A} \cdot \underbrace{B^{(j)}}_{\text{j-esima colonna di } B}$$

prodotto precedentemente definito tra matrici $1\times p$ e $p\times 1$

$$= a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

quindi quindi è detto prodotto righe per colonne.

Oss: il prodotto righe per colonne è definito solo per coppie di matrici in cui il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 + 4(-1) + 0 \cdot 3 & 11 + 42 + 0 \cdot 0 \\ 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Def: sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, chiamiamo la matrice $n\times n$ di che chiamiamo la come quella matrice diagonale (o quadrata quadrata) con tutti che tutte le entrate della diagonale principale sono uguali a 1, come

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Prop: la matrice unità che soddisfa le seguente proprietà: per ogni matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ e per ogni matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ che

$$I_n \cdot A = A \quad \text{e} \quad B \cdot I_n = B$$

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi $A \cdot B \neq B \cdot A$ (notiamo che $A \cdot B = B \cdot A$ non rappresenta abbastanza della $A, B \in M_n(\mathbb{R})$)

Prop: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e sia $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, allora valgono:

- $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (proprietà distributiva a destra)
- $A \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D$ (proprietà distributiva a sinistra)

Prop: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\underbrace{\underbrace{(A \cdot B)}_{m\times q} \cdot C}_{m\times n} = \underbrace{A \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{p\times n}}_{m\times n}$$

(proprietà associativa del prodotto)

Prop: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e sia $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, allora

$${}^t(A \cdot B) = \begin{cases} {}^tA \cdot {}^tB & ? \quad ① \\ {}^tB \cdot {}^tA & ? \quad ② \end{cases}$$

① non può essere perché il prodotto ${}^tA \cdot {}^tB$ non possono essere moltiplicate tra di loro ($m \neq p$)

② può essere una volta che $A, B \in M_{m,n}$, quindi ${}^t(AB) \in M_n(\mathbb{R})$

- ${}^tB \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ e ${}^tA \in M_{p,m}(\mathbb{R})$

ed allora che

$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Def: sia una data matrice quadrata la matrice unità che funge da elemento neutro per il prodotto righe per colonne; diciamo per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ che

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

Oss: se invece vedo delle $m \neq n$ ma $m \neq 0$, chiamo che in mano $I_m \in M$ e I_n non che:

$$I_m \cdot A = A \quad \text{e} \quad A \cdot I_n = A$$

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; la matrice A si dice invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

in tal caso la matrice B si dice inversa di A.

Prop: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, se A è invertibile, allora l'inversa è unica (e si denota con A^{-1}).

Dim: supponiamo che B, C siano entrambe inverse di A; allora

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$
$$A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

quindi

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C$$
$$= I_n \cdot C = C$$

Prop: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che entrambe A, B siano invertibili, allora la C invertibile $A \cdot B$ e l'inversa di quest'ultima è $B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dim: per prodotto che A, B è invertibile abbiamo matrice che esiste $C \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I_n$$

ma che A, B sono invertibili, supponiamo che esistano $A^{-1} = B^{-1}$, allora allora $C = B^{-1} \cdot A^{-1}$, e abbiamo

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}$$
$$= (A \cdot I_n) \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot A^{-1} = I_n$$

sviluppando in maniera che $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$

Oss: indaga la invertibilità per matrici non è invertibile per matrici non in generale tra, e allora che ogni matrice diversa dalla matrice nulla sia invertibile.

Esempio: consideriamo $A \in M_2(\mathbb{R})$ data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

notiamo che allora $A \neq 0$, ma che la A non è invertibile; infatti, se la fosse esistesse $B \in M_2(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

per cui che

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

però, se osserviamo la matrice di posto 11 e 21 di $A \cdot B$:

$$\begin{cases} 11: & b_{11} + b_{21} = 1 \\ 21: & b_{11} + b_{21} = 0 \end{cases}$$

quindi che sappiamo che esistono, sicuramente

quindi A non è invertibile.