Lezione 8 - 7/10/2025

def sia $A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste, il minimo dei maggioranti di A si dice estremo superiore di A
si indica con sup A

analogamente indico con inf A il massimo dei minoranti di A, lo chiamo estremo inferiore di A

Teorema (esistenza dell'estremo superiore)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A sup. limitato
Allora esiste il sup A

Analogamente se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A inf. limitato
Allora esiste l'inf. A.

Teorema (caratterizzazione del sup e dell'inf)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $\alpha \in \mathbb{R}$
sono equivalenti
$\alpha = \sup A$
e
$\begin{cases} 1) & \forall a \in A, \quad a \leq \alpha \\ 2) & \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \quad \bar{a} > \alpha - \varepsilon \end{cases}$

(Analogamente
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $\beta \in \mathbb{R}$
sono equivalenti
$\beta = \inf A$
e
$\begin{cases} 1) & \forall a \in A, \quad a \geq \beta \\ 2) & \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\bar{a}} \in A : \quad \bar{\bar{a}} < \beta + \varepsilon \end{cases}$)

dim.
supponiamo che α sia il sup di A
per definizione α è il minimo dei maggioranti
in particolare α è maggiorante di A
quindi $\forall a \in A$, $a \leq \alpha$ (cioè vale 1))
e poi $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ non è un maggiorante
$\neg(\forall a \in A, \ \alpha - \varepsilon \geq a)$
cioè $\exists \bar{a} \in A : \ \bar{a} > \alpha - \varepsilon$ cioè vale 2)

viceversa supponiamo che valgano 1) e 2)
¿ 1) cosa dice? $\forall a \in A$, $a \leq \alpha \Rightarrow \alpha$ è maggiorante
¿ 2) cosa dice? $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ non è un maggiorante
quindi α è il minimo dei maggioranti.
CVD

– TRE CONSEGUENZE DELL'ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE. –

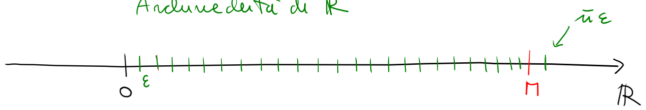
1) Proprietà di Archimede per $\mathbb{R}$

Teorema siano ε, M due numeri reali con $\varepsilon > 0$, $M > 0$.
Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \cdot \varepsilon > M$.

Teorema siano ε, M due numeri reali con $\varepsilon>0$, $M>0$.

Allora esiste $n\in\mathbb{N}$ t.c. $n\cdot\varepsilon > M$.

$\underbrace{}_{\text{Archimedeità di } \mathbb{R}}$



dim. considero $E=\{n\cdot\varepsilon,\ n\in\mathbb{N}\}=\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \dots\}$

per assurdo supponiamo che $\forall n\in\mathbb{N},\ n\varepsilon\le M$

$\Downarrow$

E sarebbe superiormente limitato (M è maggiorante di E)

E è non vuoto e sup. limitato

$\Downarrow$

$\exists\, \xi\in\mathbb{R},\ \xi=\sup E$

Allora $\boxed{\xi-\varepsilon \text{ non è un maggiorante}}$.

è l'epsilon fissato

ma allora $\boxed{\exists\, n^*\in\mathbb{N} \text{ t.c. } n^*\varepsilon > \xi-\varepsilon}$

ma allora $(n^*+1)\varepsilon > \xi$

ma allora ξ non è maggiorante! impossibile

CVD

Esempio

consideriamo $\mathbb{N}$

proviamo che $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato

per assurdo $\mathbb{N}$ sia sup. limitato

quindi $\exists\, M\in\mathbb{R}:\ \forall n,\ n\le M$

$\mathbb{N}$ è non vuoto e sup. limitato

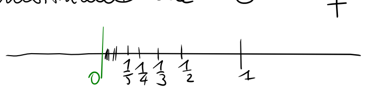
Sia $\alpha=\sup\mathbb{N}$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$

allora $\alpha-1$ non è maggiorante

allora $\exists\, n^*:\ n^*>\alpha-1$

allora $n^*+1>\alpha$ impossibile perché $\alpha=\sup\mathbb{N}$

ES. mostriamo che $0=\inf\left\{\frac{1}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$



proviamo che $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\bar n:\ \frac{1}{\bar n}<\varepsilon$

ragiono così

fisso $\varepsilon>0$, fisso 1 (al posto di M nella prop. di Archimede)

$\exists\, n^*\in\mathbb{N}:\ n^*\varepsilon>1$

$\Downarrow$

$\frac{1}{n^*}<\varepsilon$ $\quad$ OK

2) densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Teorema

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < q < b$.

(a parole: tra 2 numeri reali c'è sempre un numero razionale)

oss. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lo chiamo insieme dei numeri irrazionali. una conseguenza del teorema qui sopra è che non ci sono intervalli fatti solo di irrazionali, razionali e irrazionali sono "mescolati".

dim. se $a < 0 < b$ c'è un razionale tra a e b? sì è 0.

se so risolvere il problema quando $0 \le a < b$ ho concluso? sì

perché basta cambiare i segni.

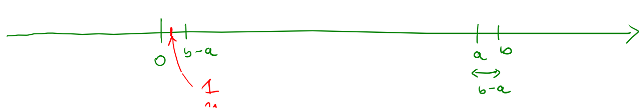
basta considerare il caso $0 \le a < b$

qui devo trovare un razionale.

considero $b - a$. ho $b - a > 0$

ragionando con l'archimedeità so che $\exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

tale che $0 < \frac{1}{n} < b - a$



se $a = 0$ ho finito

$a = 0$ $\quad b - a = b$

ho $\boxed{0 < \frac{1}{n} < b}$

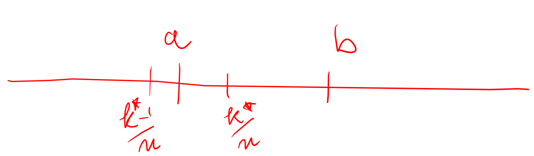
questo è il razionale che cerco

se $a > 0$, ho $\frac{1}{n} > 0$, $a > 0$

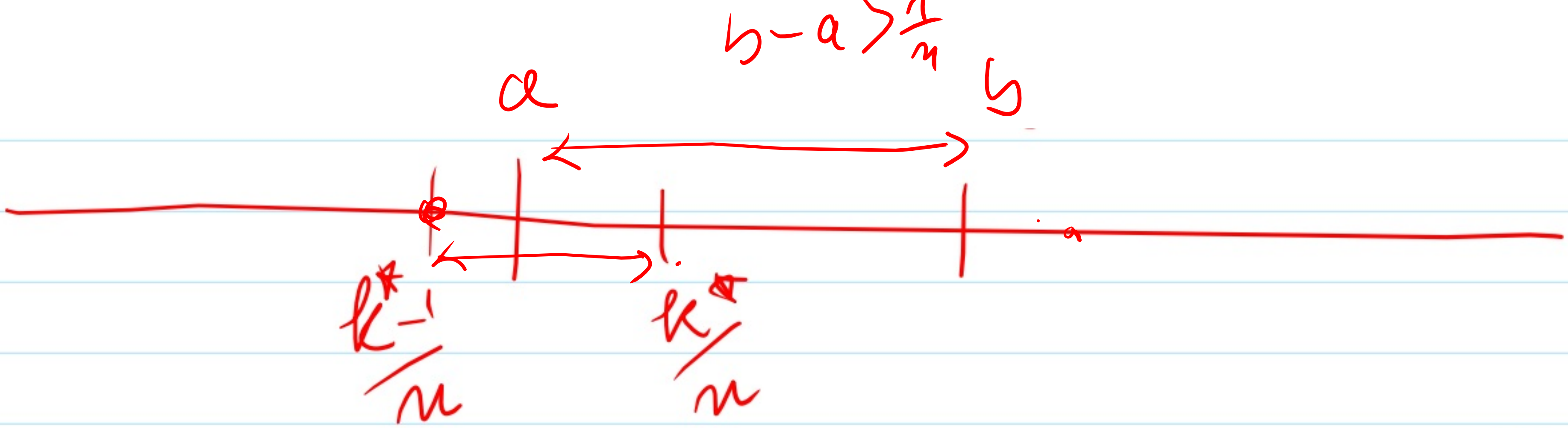
uso la proprietà di Archimede

$\exists\, k : \quad a < \frac{k}{n}$

a questo punto sia k^* il minimo dei k t.c. $a < \frac{k^*}{n}$



per concludere devo far vedere che $a < \frac{k^*}{n} < b$



per concludere devo far vedere che $a < \frac{k^*}{n} < b$

ho $\frac{k^*-1}{n} \le a$

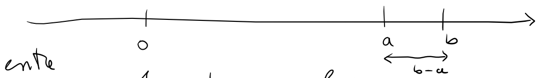
può essere $\frac{k^*}{n} \ge b$? NO

perché $\frac{1}{n} < b-a$

altrimenti $\frac{k^*}{n} - \frac{k^*-1}{n} \ge b-a$ imp

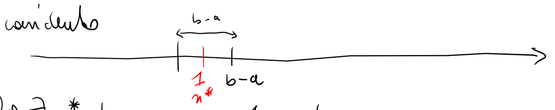
CVD

devo provare che se ho $0 \le a < b$

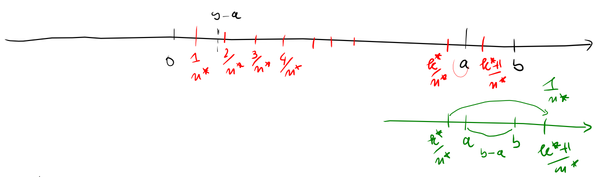


allora esiste $\frac{k}{n}$ t.c. $a < \frac{k}{n} < b$.

ho considerato



so che $\exists\, n^*$ t.c. $0 < \frac{1}{n^*} < b-a$



3) INTERVALLI CHIUSI, LIMITATI e INSCATOLATI.

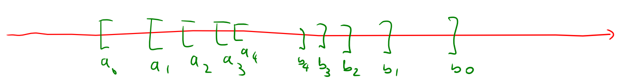
considero una successione di intervalli.

$$\mathbb{N} \longrightarrow \{\text{intervalli chiusi e limitati}\}$$
$$n \longmapsto [a_n, b_n]$$

$$([a_n,b_n])_n \qquad \left((a_n)_n \quad f:\mathbb{N}\to A,\ n\mapsto a_n \right)$$

def. data una succ. di intervalli chiusi e limitati li diciamo "inscatolati" se $\forall n$

$$[a_n,b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$$



Teorema (CANTOR)

sia $([a_n,b_n])_n$ una successione di int. chiusi, limitati e inscatolati

Allora $\bigcap_n [a_n,b_n] = [\alpha,\beta] \neq \emptyset$

intersezione di tutti

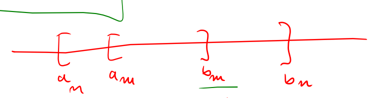
dove $\alpha = \sup a_n$, $\beta = \inf b_n$

e $\alpha \le \beta$ (c'è anche il caso $[\alpha,\alpha] = \{\alpha\}$)

dim. $\boxed{\text{osservo che } \forall n, m, \text{ ho } a_n \le b_m}$

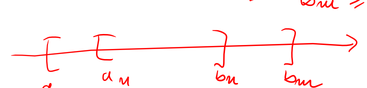
infatti

sia $n \le m$ OK



$\Rightarrow b_m \ge a_n$

sia $m \le n$



$\Rightarrow a_n \le b_m$

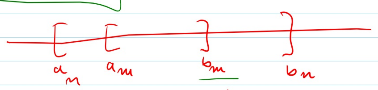
$[\alpha, \alpha] = \{\alpha\})$

dim.

$\boxed{\text{osservo che } \forall n, m, \text{ ho } a_n \leq b_m}$

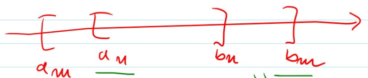
infatti

sia $n \leq m$ ok



$\Rightarrow b_m \geq a_n$

sia $m \leq n$



$\Rightarrow a_n \leq b_m$

quindi $\forall n, \forall m$, $a_n \leq b_m$

in particolare $\forall n$, $a_n \leq b_m$

quindi b_m è un maggiorante per $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

allora $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ è non vuoto e sup. limitato

sia $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\alpha}} = \sup\{a_n\}$ ho $\alpha \leq b_m$

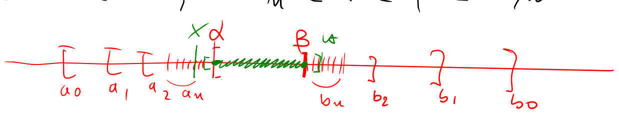
allora $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $\underline{\underline{\forall m}}$, $\alpha \leq b_m$

allora α è un minorante di $\{b_m, m \in \mathbb{N}\}$

allora $\{b_m\}$ ha estremo inferiore e lo chiamo β

ho $\alpha \leq \beta$

concludo $\forall n$, $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$



quindi $\bigcap_n [a_n, b_n] \supseteq [\alpha, \beta]$

per provare che vale $=$

se prendo $x < \alpha$ ho che $\exists n$ t.c. $a_n > x$

allora $x \notin [a_n, b_n]$ allora $x \notin \bigcap_n [a_n, b_n]$

e analogo per $x > \beta$

attenzione $\bigcap_n [a_n, b_n]$ è di nuovo $\neq \emptyset$

al minimo $\alpha = \beta$

e $\bigcap_n [a_n, b_n] = \{\alpha\}$

CVD

Teorema (Forma forte del Teo. di CANTOR)

sia $([a_n, b_n])_n$ una successione di intervalli chiusi, limitati, incapsulati e dimezzati

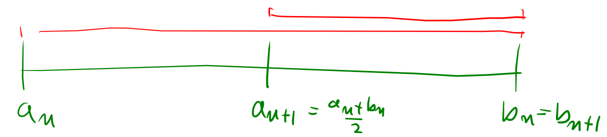
Teorema (Forma forte del teor. di CANTOR)

Sia $([a_n,b_n])_n$ una successione di intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati

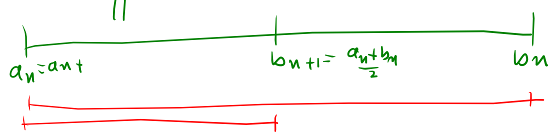
dimezzati significa $\forall n$, $a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

oppure

$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$



oppure

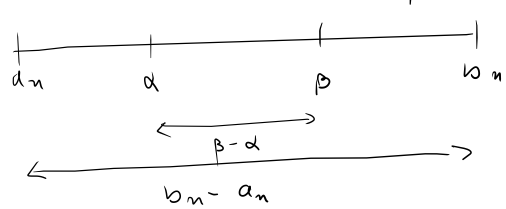


$\exists\, \xi\in\mathbb{R} : \bigcap_n [a_n,b_n]=\{\xi\}$.

dim. per assurdo supponiamo $\alpha<\beta$

con $\alpha=\sup\{a_n\}$, $\beta=\inf\{b_n\}$

si avrebbe $b_n-a_n \geq \beta-\alpha>0$ $\forall n$



ma se sono dimezzati $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}$

quindi $b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^n}$

allora $\frac{b_0-a_0}{2^n}<\frac{b_0-a_0}{n}$

perché $2^n\geq n$ ← siamo sicuri? sì

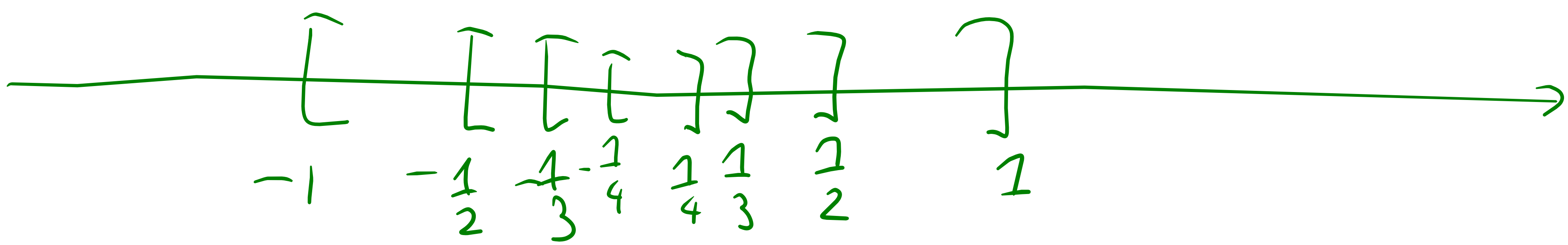
allora $\frac{b_0-a_0}{n}<\beta-\alpha$ se n è abb. grande

se $\beta-\alpha>0$

quindi è impossibile che $\beta-\alpha>0$

CVD

$a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $[a_n, b_n] = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$



$0 \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $\forall n$ $\qquad$ $\bigcap_n [a_n, b_n] = \bigcap_n \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$

$\{0\} \neq \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$