

Istituzioni di Algebra e Geometria

A.A. 2025/2026

Foglio di esercizi 1

Esercizio 1. Si dimostri che i polinomi $y - x^2 \in \mathbb{C}[x, y]$ e $x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{C}[x, y]$ sono irriducibili.

Esercizio 2. Si dimostri che un campo algebricamente chiuso ha infiniti elementi.

Esercizio 3. Si dimostri che una curva piana algebrica nel piano affine complesso $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ ha infiniti punti. Questo è vero anche sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$?

Esercizio 4. Si dimostri che se K è un campo infinito e se $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ è un polinomio tale che la funzione

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

indotta da f è la funzione nulla, allora f è il polinomio nullo.

Suggerimento: usare l'induzione sul numero delle variabili.

Esercizio 5. Esibire un campo K e un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ non nullo tale che la funzione

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

indotta da f è la funzione nulla.