

Istituzioni di Algebra e Geometria

A.A. 2025/2026

Foglio di esercizi 2

Esercizio 1. Si determini una base del K -sottospazio vettoriale $K[x_0, x_1, x_2]_d$ dei polinomi omogenei di grado d con l'aggiunta del polinomio nullo, e si calcoli la sua dimensione.

Esercizio 2. Si verifichi che se $F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]_d$ è un polinomio omogeneo non nullo, allora

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2)$$

dove $A = (a_0 : a_1 : a_2) \neq B = (b_0 : b_1 : b_2)$ sono due punti di $\mathbb{P}_K^2$, è un polinomio omogeneo di grado d .

Esercizio 3. Sia $r \subset \mathbb{A}_K^2$ una retta affine di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \ell t + q_1, \\ y = m t + q_2. \end{cases}$$

Si dimostri che la sua chiusura proiettiva è una retta proiettiva descritta da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 = \mu \\ x_1 = \ell \lambda + q_1 \mu \\ x_2 = m \lambda + q_2 \mu. \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. Siano $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$. Si dimostri che i polinomi omogeneizzati verificano

$$h(f \cdot g) = hf \cdot hg.$$

2. Siano $F, G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ due polinomi omogenei. Si dimostri che i deomogeneizzati verificano

$$a(F \cdot G) = aF \cdot aG.$$

Esercizio 5. Si consideri la curva piana affine complesso di equazione

$$x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0.$$

1. Si trovi la chiusura proiettiva della curva e i suoi eventuali punti impropri (ovvero le intersezioni con la retta $\{x_0 = 0\}$);
2. si dica se la curva sia irriducibile o meno.

Esercizio 6. Nel piano proiettivo complesso, si consideri la chiusura proiettiva $\overline{C}$ della curva affine di equazione:

$$(x - 1)(x^2 + y^2) - x = 0.$$

Si determinino i punti impropri di $\overline{C}$, ovvero le intersezioni di $\overline{C}$ con la retta $\{x_0 = 0\}$.

Esercizio 7. Usando l'Esercizio 5 del Foglio 1, dimostrare che se K è un campo infinito ed $f \in K[x, y] \setminus \{0\}$, allora l'insieme $\mathbb{A}_K^2 \setminus Z(f)$ è non vuoto.