

13 ottobre $\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ \forall K > 0 \exists \delta_K > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_K \text{ e } x \in X \\ \text{allora } f(x) > K \end{array} \right)$

Def $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$

Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$, allora

scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_K \text{ e } x \in X$
allora $f(x) < -K$.

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

Si tratta di dimostrare che

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall K > 0 \exists \delta_K > 0 \text{ t.c. } 0 < |x| < \delta_K \\ \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < -K \end{array}} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} < -K &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2}} > \sqrt{K} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > \sqrt{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}} =: \delta_K \end{aligned}$$

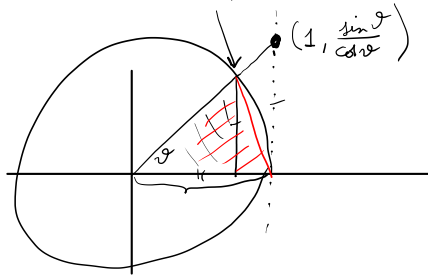
Un esempio di limite notevole

Teorema $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dim Preliminarmente considero nome delle variabili

scrivendo $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1$

Sia $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$



$$\frac{y}{1} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$$

$$y = \tan(\vartheta) = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$$

$$\text{Area (triangolo rosso)} = \frac{\sin \vartheta}{2}$$

$$\text{Area (setto circolare)} = \frac{\vartheta}{2}$$

$$\text{Area (triangolo rettangolo grande)} = \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta}$$

$$\sin \vartheta < \vartheta < \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} < \frac{1}{\cos \vartheta} \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

Ritornando alla variabile indipendente x

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Tutte e tre le funzioni sono pari, quindi verificato

$$\boxed{1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $x \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$ $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, 0)$
 1 $\frac{1}{1} = 1$

Per i Corollari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

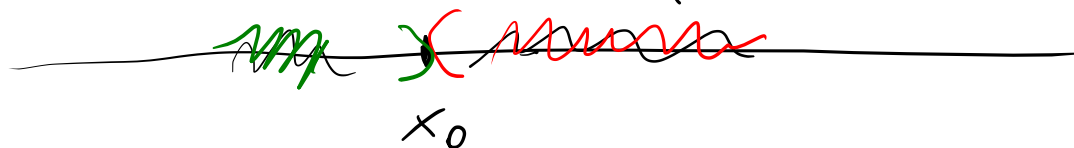
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

Lemma Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X'$. Allora

x_0 è un punto di accumulazione di almeno uno dei seguenti due insiemi

1) $X \cap (x_0, +\infty) = \{x \in X : x > x_0\}$ e

2) $X \cap (-\infty, x_0) = \{x \in X : x < x_0\}$



Viceversa se x_0 è un punto di accumulazione di almeno uno dei due insiemi in 1) e 2) allora $x_0 \in X'$.

Esercizio Siano $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$X' \subseteq Y'.$$

Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X'$

1) Se $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$ e $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{X \cap (x_0, +\infty)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \alpha$$

chiamo α il limite destro di f in x_0 e
scriviamo anche

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha} \quad \}$$

(Notazione: Quando $\alpha \in \mathbb{R}$ denoteremo questo
limite destro con $f(x_0^+)$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad \}$$

2) Se $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ e $\exists L \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{X \cap (-\infty, x_0)} = L = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

chiamo L il limite sinistro di f in x_0 e

$$\text{scriviamo } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

(Notazione: se $L \in \mathbb{R}$ denoteremo il limite
sinistro con $f(x_0^-)$ e scriviamo

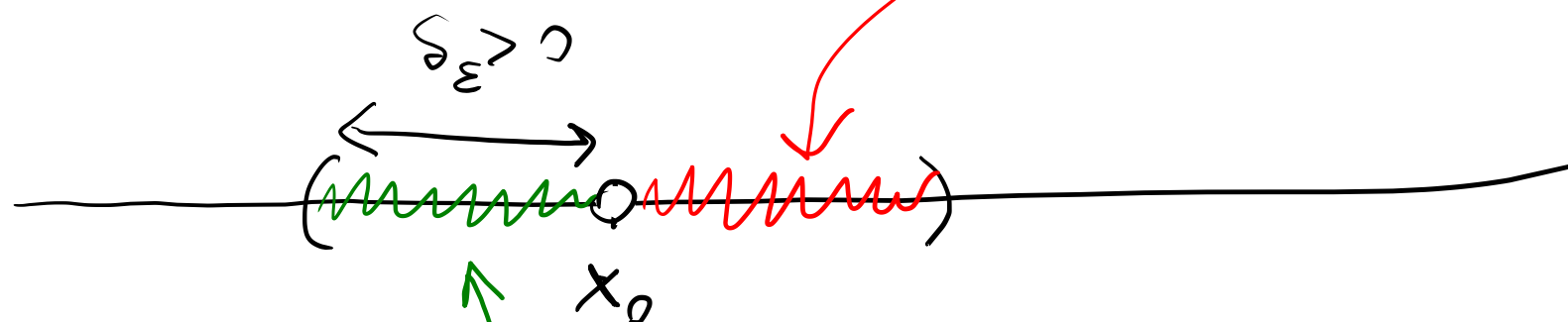
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad \}$$

Osservazione Se $R \in \mathbb{R}$ scrive che

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = R$ significa che

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ e $x \in X$

$$\Rightarrow |f(x) - R| < \varepsilon$$



Se $L \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ significa che

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Teorema Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$.

sono equivalenti:

1) Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

2) Esistono separatamente $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

e sono uguali

Quindi 1) e 2) sono vere allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Teorema Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$.

Supponiamo inoltre che f sia monotona. Se

1) Se $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{esiste}$$

e se f è crescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x > x_0 \},$$

se f è decrescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup \{ f(x) : x > x_0 \}.$$

2) Se $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ allora esiste

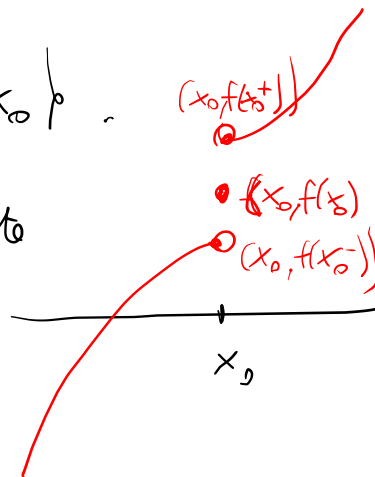
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

se f è crescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x < x_0 \}$$

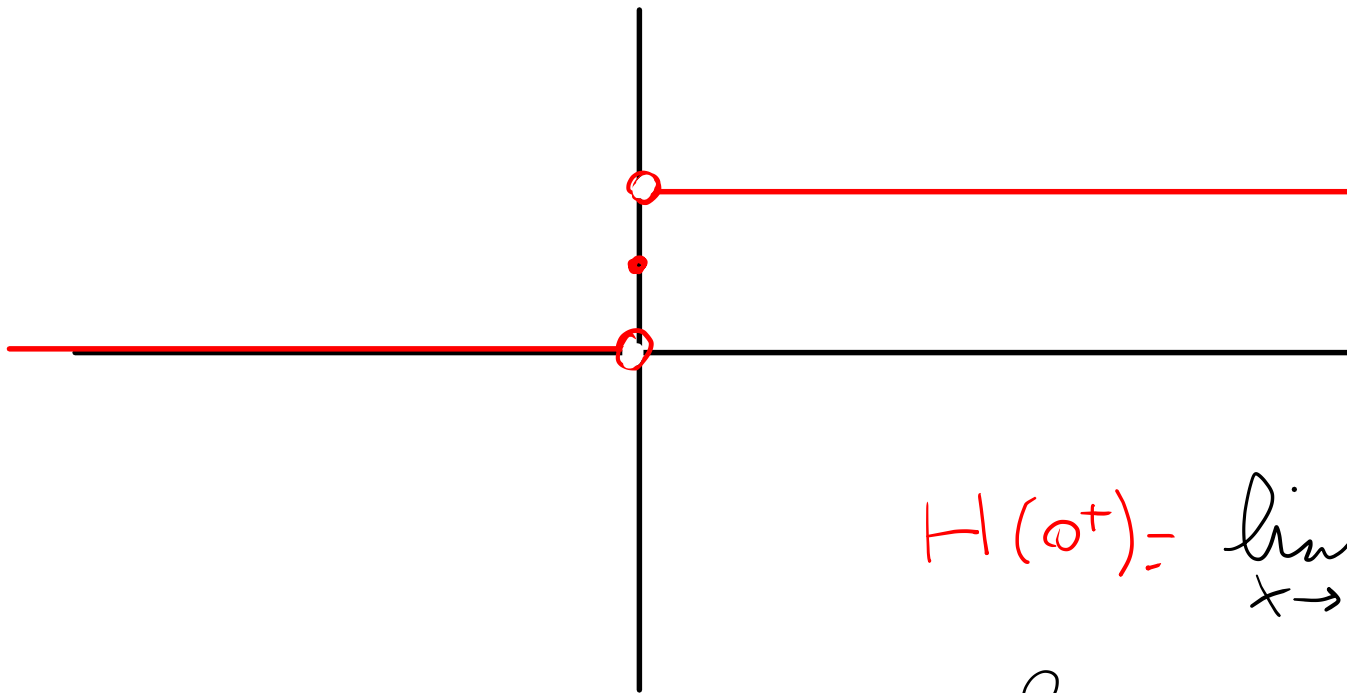
e se f è decrescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf \{ f(x) : x < x_0 \}.$$



Fespiro (Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



$$H(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 =$$

$$= \inf \{ H(x) : x > 0 \}$$

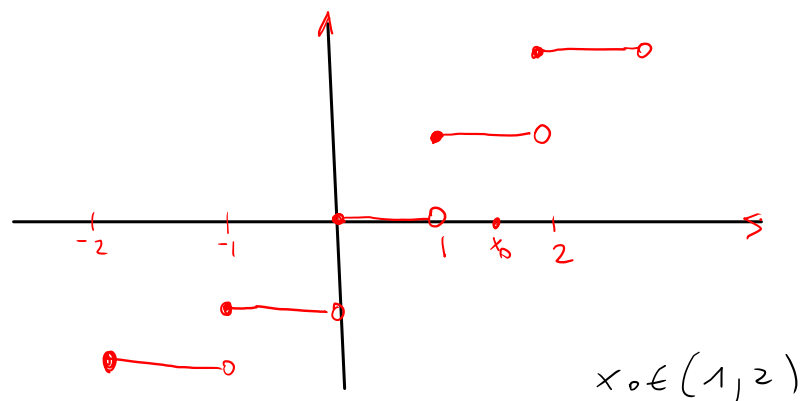
$$= \inf \{ 1 \}$$

$$H(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = \sup \{ H(x) : x < 0 \}$$

$$= \sup \{ 0 \}$$

Esempio $[x]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ con

$$[x] \leq x < [x] + 1$$



Se $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x_0] < x_0 < [x_0] + 1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0} [x]_{(1,2)} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 = [x_0]$$

e più in generale, $\forall x_0 \notin \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x] = [x_0],$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z} \\ \downarrow \\ \text{Se } x_0 < x < x_0 + 1 \\ \Rightarrow [x] = x_0 \end{array}$$

$$x_0 \in \mathbb{Z} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x]_{(x_0, x_0+1)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} x_0$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z} \\ \downarrow \\ x_0 - 1 < x < x_0 \Rightarrow [x] = x_0 - 1 \end{array} = x_0 = [x_0] = [x_0^+]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [x]_{(x_0-1, x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x_0 - 1) = (x_0 - 1) = [x_0^-]$$

Se $x_0 \in \mathbb{Z}$

$$[x_0^+] = [x_0] = x_0 \quad [x_0^-] = x_0 - 1$$

Se $x_0 \notin \mathbb{Z} \quad [x_0^\pm] = [x_0]$

Altro esempio

Sia $b > 1$, allora b^x è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Qui dedurremo per scontato il fatto b^x è crescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_1} < b^{x_2}.$$

Inconveniente al discutere la continuità in 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} b^x = b^0 = 1$$

$$b^x > 1 \quad \forall x > 0$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = \inf \{ b^x : x > 0 \}$$

$$\leq \inf \{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{\frac{1}{n}} (= 1)$$

$n \rightarrow b^{\frac{1}{n}}$ è decrescente

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = 1$$