

Cinematica del punto materiale

→ Meccanica $\left\{ \begin{array}{l} \checkmark \text{ Cinematica} \rightarrow (\text{studia il moto - chinema-}) \\ \text{ Statica} \\ \text{ Dinamica} \end{array} \right.$ non le sue cause

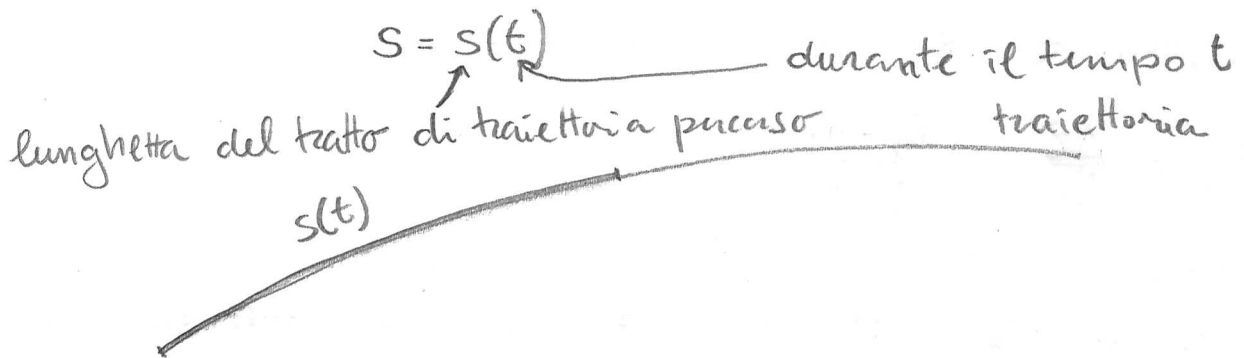
→ Punto Materiale: punto geometrico dotato di massa (es: dimensioni trascurabili rispetto al percorso)

→ Il moto di un punto materiale è completamente noto $\updownarrow$ (se e solo se)

conosco la sua posizione nello spazio per ogni istante di tempo

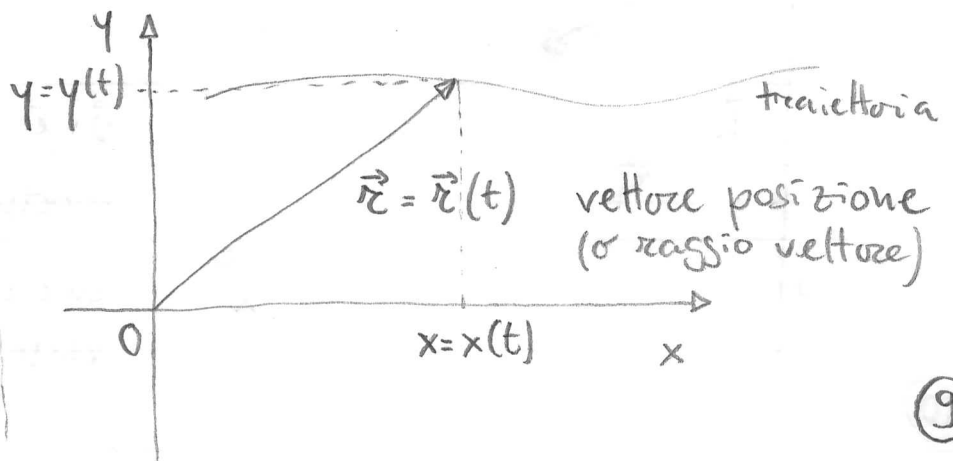
→ traiettoria: luogo delle posizioni assunte dal punto materiale durante il suo moto

→ se conosco a priori la traiettoria del punto materiale, posso descrivere correttamente il moto con una funzione



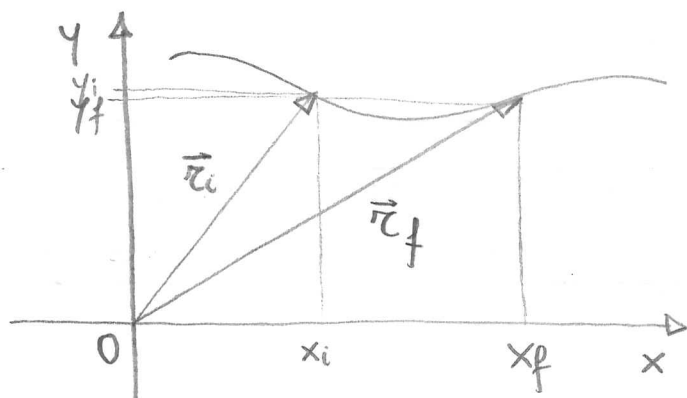
→ se NON conosco la traiettoria (caso più generale) posso sempre indicare la posizione nello spazio istante per istante rispetto ad un opportuno sistema di riferimento:

NOTA
il vettore posizione cambia nel tempo e riassume in sé le componenti
 $x = x(t)$
 $y = y(t)$



→ Spostamento

Considero un intervallo di tempo Δt , che inizia al tempo t_i e finisce al tempo t_f : $\Delta t = t_f - t_i$



$\vec{r}_i$: posizione al tempo t_i

$\vec{r}_f$: " " " t_f

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

vettore spostamento

→ Velocità media

in 1D, il moto è unidimensionale. Possiamo assumelo lungo l'asse x



x_i : posizione al tempo t_i

x_f : " " " t_f

$$\Delta x = x_f - x_i \quad \text{spostamento}$$

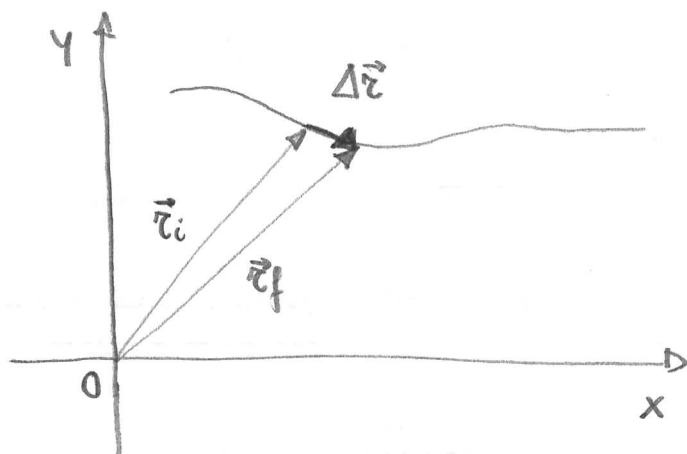
$$\text{Definisco velocità media } \vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Analogamente nel caso 2D (o anche 3D):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

→ Velocità istantanea

Se $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{v}_m \rightarrow \vec{v}$, dove $\vec{v}$ indica la velocità istantanea ("tende a 0" ovvero assume valori infinitesimi)



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \left(= \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

derivata di $\vec{r}$ rispetto a t

$\vec{v}$ è un vettore

modulo: $\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|$

direzione: tangente alla traiett.

verso: quello del moto

Unità SI per la velocità: $\frac{m}{s}$
 c.g.s. $\longrightarrow \frac{cm}{s}$
 pratiche $\longrightarrow \frac{km}{h}$

NOTE: $\rightarrow 1 \frac{km}{h} = \frac{10^3 m}{3,6 \cdot 10^3 s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$

$\rightarrow 1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$

$\rightarrow c = 299792458 \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s} = 30 \frac{cm}{ms}$

$\rightarrow$ Accelerazione media e istantanea

29/10/2020

Sempre con riferimento ad un intervallo di tempo Δt , che inizia al tempo t_i e finisce al tempo t_f , definisco:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

con $\vec{v}_f$: velocità istantanea al tempo t_f

$\vec{v}_i$: velocità istantanea al tempo t_i

↑
accelerazione media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \left(= \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{derivata di } \vec{v} \text{ rispetto a } t \right)$$

Unità SI per l'accelerazione $\frac{m}{s^2}$
 cgs $\longrightarrow \frac{cm}{s^2}$

NOTE: $\rightarrow \vec{g}$ accelerazione di gravità è verticale, punta verso il basso ed ha modulo

$$|\vec{g}| = g = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

Talvolta usata come unità pratica $1g = 9,8 \frac{m}{s^2}$

$\rightarrow$ il vettore $\vec{a}$ in genere NON è tangente alla traiettoria, ma ha sia una componente tangenziale che una componente "normale" (cioè ortogonale) alla traiettoria

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

↓
 ↳ dovuta a variazioni della direzione di $\vec{v}$

↓
 ↳ dovuta a variazioni del modulo di $\vec{v}$

→ Rappresentazione del moto

Per semplicità consideriamo un moto 1D, quindi tipo $x = x(t)$ (molte delle considerazioni che seguono si possono estendere a 2D o 3D, e valgono in particolare se il moto è del tipo $s = s(t)$ lungo una traiettoria nota)

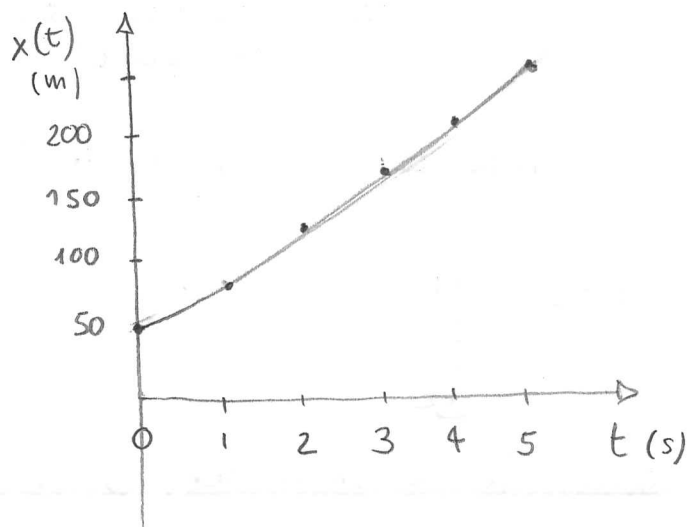
Ci sono almeno 3 modi diversi di rappresentare il moto:

1) Tabella della legge oraria.

$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$
0	50
1	82
2	118
3	158
4	202
5	250

si forniscono i valori di $x(t)$ corrispondenti a dei dati istanti di t

2) Diagramma della legge oraria



si utilizza un diagramma cartesiano con t sull'asse delle ascisse e $x(t)$ sulle ordinate

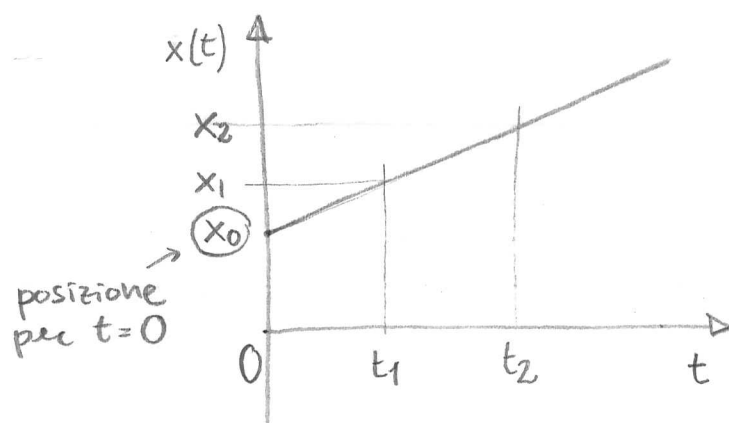
3) (se moto è regolare, ovvero la posizione $x(t)$ è esprimibile come una funzione analitica del tempo)

Forma funzionale della legge oraria:

$$x(t) = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2 + \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) t + 50 \text{ m}$$

NOTA: come vedremo, in questo caso il metodo 3) è possibile perché il moto considerato è un moto "regolare" con accelerazione costante (moto uniformemente accelerato).

→ Moto rettilineo uniforme
 $\downarrow$ 1D $\downarrow$ v costante, ovvero non cambia nel tempo
 v è costante. Sia $v = v_0$



$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

v_m è la pendenza media del tratto da x_1 a x_2

ma v è costante, quindi

$$v_m = v_0 \text{ per ogni } \Delta t$$

La pendenza della curva è costante e pari a $v_0 \Rightarrow$

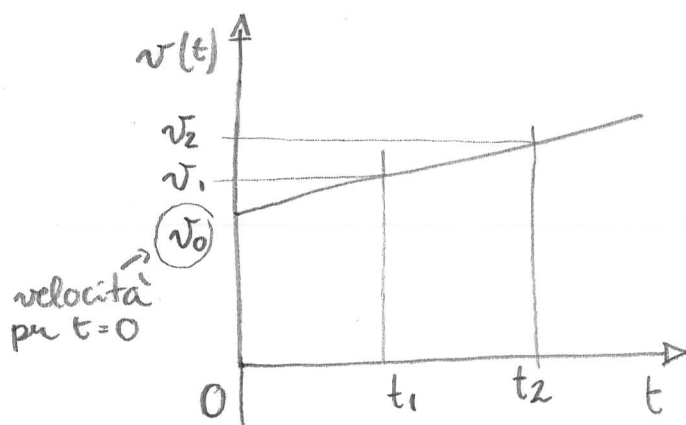
La curva è una retta con coefficiente angolare $v_0 \Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$$

→ Moto rettilineo uniformemente accelerato
 acceleraz. costante

a è costante. Sia $a = a_0$

Posso ripetere il ragionamento precedente nel diagramma della legge oraria della velocità



$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_m = a_0 \text{ per ogni } \Delta t$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 t} \quad \text{I}$$

Per il moto uniformemente accelerato si ha inoltre:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \quad \text{II}$$

E sostituendo t da I in II si ha infine:

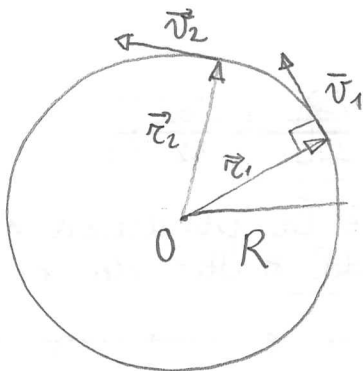
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0 (x - x_0)} \quad \text{III}$$

Nota: la dipendenza da t di v e x è implicita, sottintesa (13)

→ Moto Circolare Uniforme

la traiettoria è circolare

la velocità è costante in modulo



$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$$

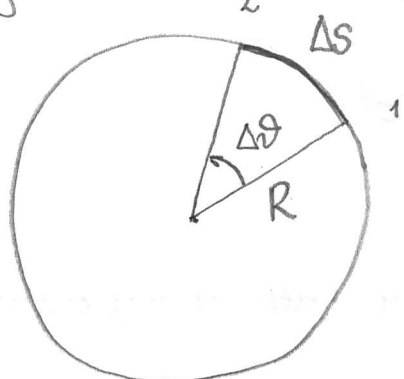
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

nota: in ogni istante $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali tra di loro ($\vec{v}$ è tangente alla traiettoria)

nota: R e v sono costanti nel tempo mentre $\vec{r}$ e $\vec{v}$ cambiano continuamente direzione.

- velocità angolare

Considero $\Delta t = t_2 - t_1$ e chiamo $\Delta\theta$ il corrispondente intervallo angolare e Δs la lunghezza del corrispondente arco di circonferenza.



Definisco:

- velocità angolare media $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
- " " istantanea $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Poiché $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$

si ha $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t \cdot R} = \frac{v}{R} = \omega_m = \omega$

ω è costante, poiché rapporto tra due costanti (v ed R).

ω si misura in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

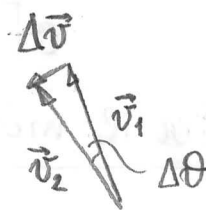
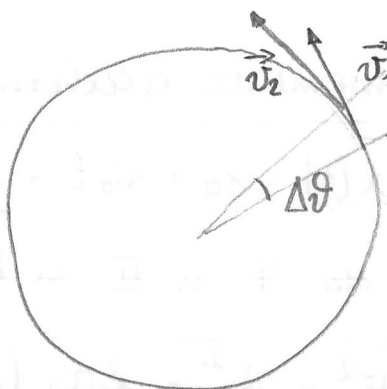
$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

$$\sigma \quad \boxed{v = \omega R}$$

- accelerazione

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



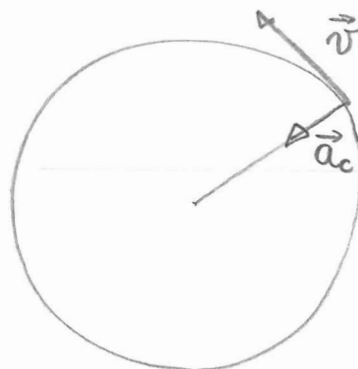
$$|\Delta\vec{v}| \cong v \cdot \Delta\theta$$

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega v$$

Quindi $|\vec{a}| = \omega v = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

Per quanto riguarda direzione e verso di $\vec{a}$, essi sono gli stessi di $\Delta\vec{v}$. $\Delta\vec{v}$ si dispone ortogonale a $\vec{v}$, quindi parallelo ad $\vec{r}$, e punta verso il centro. Si parla di accelerazione centripeta a_c .

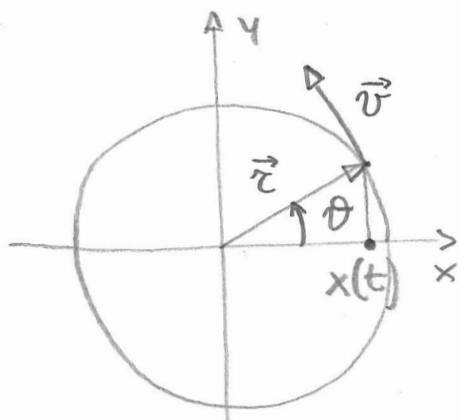
$$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$



Il moto circolare uniforme è periodico con periodo T

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \leftarrow \text{in questo caso si dice anche "pulsazione" del moto periodico} \\ T &= \frac{1}{\nu} \leftarrow \text{"ni", frequenza, si misura in Hz (1 Hz = 1 s^{-1})} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega &= 2\pi \nu \end{aligned}$$

→ Moto Armonico



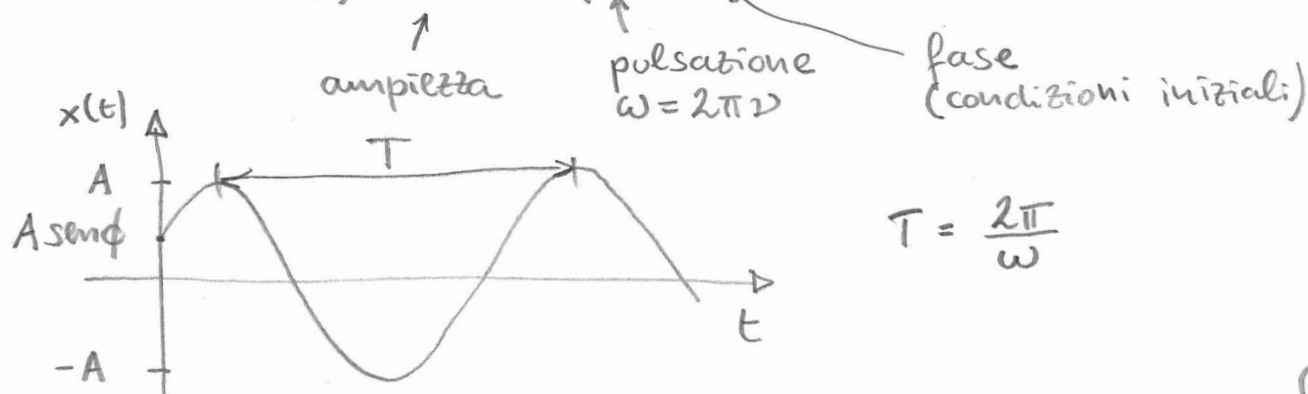
$$\theta = \omega t$$

$$x(t) = R \cos(\theta) = R \cos(\omega t)$$

esempio di moto armonico, molto frequente in natura

In generale è moto armonico ogni moto del tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$



Da

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

si ottiene

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

e

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$