Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 3 - Numeri complessi - 13/10/2025

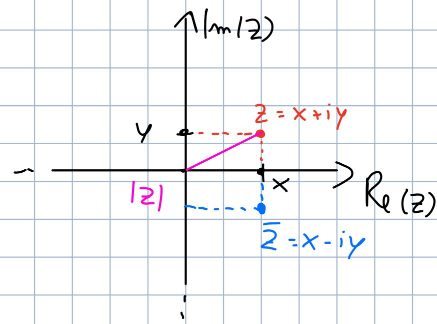
Richiamo

- Scriviamo un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ nella sua forma algebrica

$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ e i unità immaginaria che soddisfa $i^2 = -1$.

Si può anche scrivere $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$ $\left(z = Re(z) + i\, Im(z) \right)$.

- Lo possiamo rappresentare come un punto nel piano di Gauss



- $\bar{z} = x - iy$ complesso coniugato
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ modulo di z

↳ ovvero la distanza da 0 nel piano di Gauss.

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ → può essere utile nelle equazioni e nello scrivere in forma algebrica numeri complessi con "i" al denominatore. Infatti:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

↳ $|z_2|^2$ è solo reale!

- $i^0 = 1$
  $i^1 = i$
  $i^2 = -1$
  $i^3 = -i$
  $i^4 = 1$

$\Rightarrow i^{4+k} = i^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

[Ritornerete sui numeri complessi a fine corso, dopo che vedrete la forma trigonometrica e/o esponenziale.]

ESERCIZI

Es. 1

Scrivere somma e prodotto di $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 - i$ in forma algebrica.

Es. 2

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

i) $\dfrac{i}{i+1}$ ii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

Es. 3

Disegnare sul piano di Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi

i) $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2 \ , \ |z - 3 - 2i| \geq 1 \}$

ii) $B = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1 \ , \ \mathrm{Im}(z^2) \leq 2 \}$

Es. 4

Risolvere le equazioni in campo complesso:

i) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$ ii) $(1+i)z + (1+2i)\bar{z} + 3 - i = 0$

Es. 5 (esame 31/01/2020)

Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $\bar{z} z^2 + |z|^2 = 2z$

Es. 6 (3/09/2025)

Si scrivano i numeri complessi nella forma $a + ib$

i) $(-1+i)^{-5}$ ii) $\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^3$

Soluzioni

Es. 1

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 3 - i$$

- $z_1 + z_2 = 1 + 2i + 3 - i = 4 + i \quad \longrightarrow \quad Re(z_1 + z_2) = 4, \quad Im(z_1 + z_2) = 1$

- $z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2$

$$= 3 - i + 6i + 2 = 5 + 5i \quad \longrightarrow \quad Re(z_1 \cdot z_2) = 5, \quad Im(z_1 \cdot z_2) = 5$$

Es. 2

i) $$\frac{i}{i+1} = \frac{i}{i+1} \cdot 1 = \frac{i}{i+1} \cdot \underbrace{\frac{i-1}{i-1}}_{=1} = \frac{i(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{i^2 - i}{i^2 - 1^2} = \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\Rightarrow Re\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{1}{2}, \quad Im\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{1}{2}$$

ii) $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left[\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right]^2 = \left[\frac{(1+i)^2}{1^2 - i^2}\right]^2 = \left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^2 = \frac{(1+i)^4}{2^2}$$

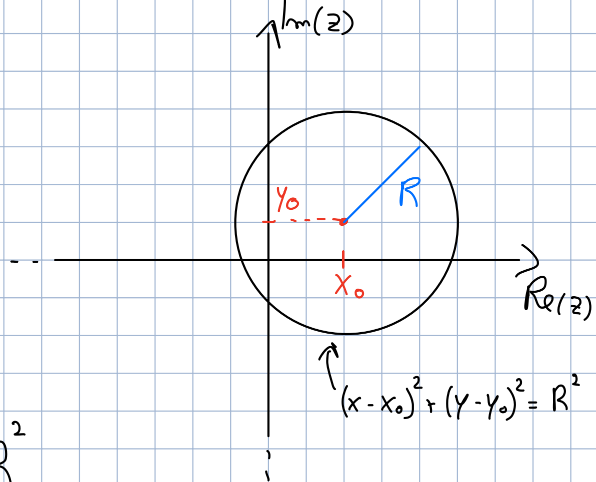
$$= \frac{1^4 + i^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot i + 4 \cdot 1 \cdot i^3 + 6 \cdot 1^2 \cdot i^2}{4} = \frac{1 + 1 + \cancel{4i} - \cancel{4i} - 6}{4} = -1.$$

$$\Rightarrow Re\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) = -1, \quad Im\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) = 0$$

Es. 3

i) $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2 \ , \ |z - 3 - 2i| \geq 1 \}$

Notiamo che un insieme del tipo $\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R \}$ non è altro che una circonferenza centrata in z_0 e di raggio R nel piano di Gauss. Questo si può anche vedere passando per la forma algebrica:



$z = x + iy \quad , \quad z_0 = x_0 + iy_0$

$$|z - z_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Dunque elevando al quadrato otteniamo:

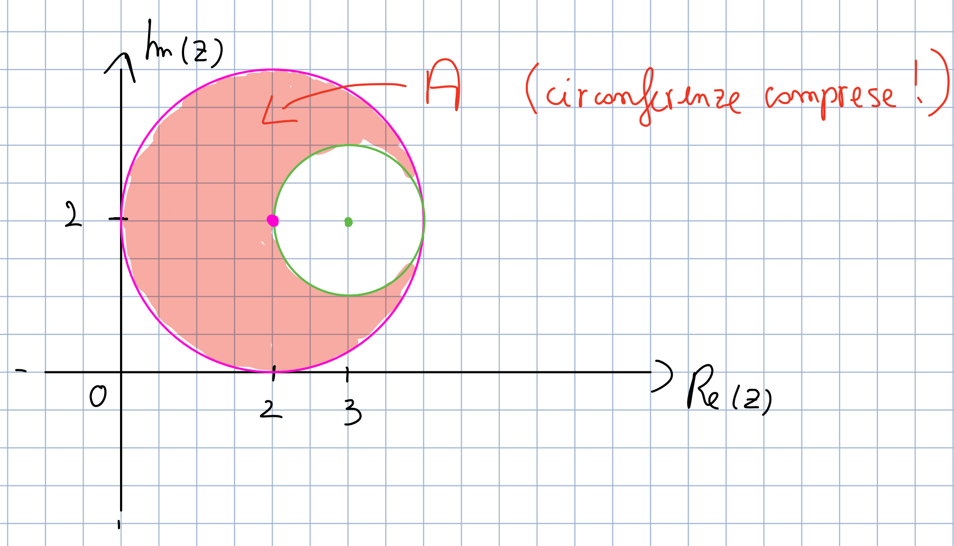
$$|z - z_0| = R \Rightarrow |z - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Quindi una regione del tipo $\{ |z - z_0| \leq R \}$ è il cerchio contenuto nella circonferenza, mentre una del tipo $\{ |z - z_0| \geq R \}$ è la regione esterna, al di fuori della circonferenza.

Tornando ad A:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2 \ , \ |z - 3 - 2i| \geq 1 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : \underbrace{|z - (2+2i)| \leq 2}_{\text{area dentro la circonferenza centrata in } 2+2i \text{ e di raggio } 2.} \ , \ \underbrace{|z - (3+2i)| \geq 1}_{\text{area fuori dalla circonferenza centrata in } 3+2i \text{ e di raggio } 1.} \}$$



ii) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1 \;,\; \operatorname{Im}(z^2) \leq 2 \right\}$

$z = x + iy$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2i\,xy + (iy)^2 = x^2 + 2i\,xy + i^2 y^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \quad , \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$

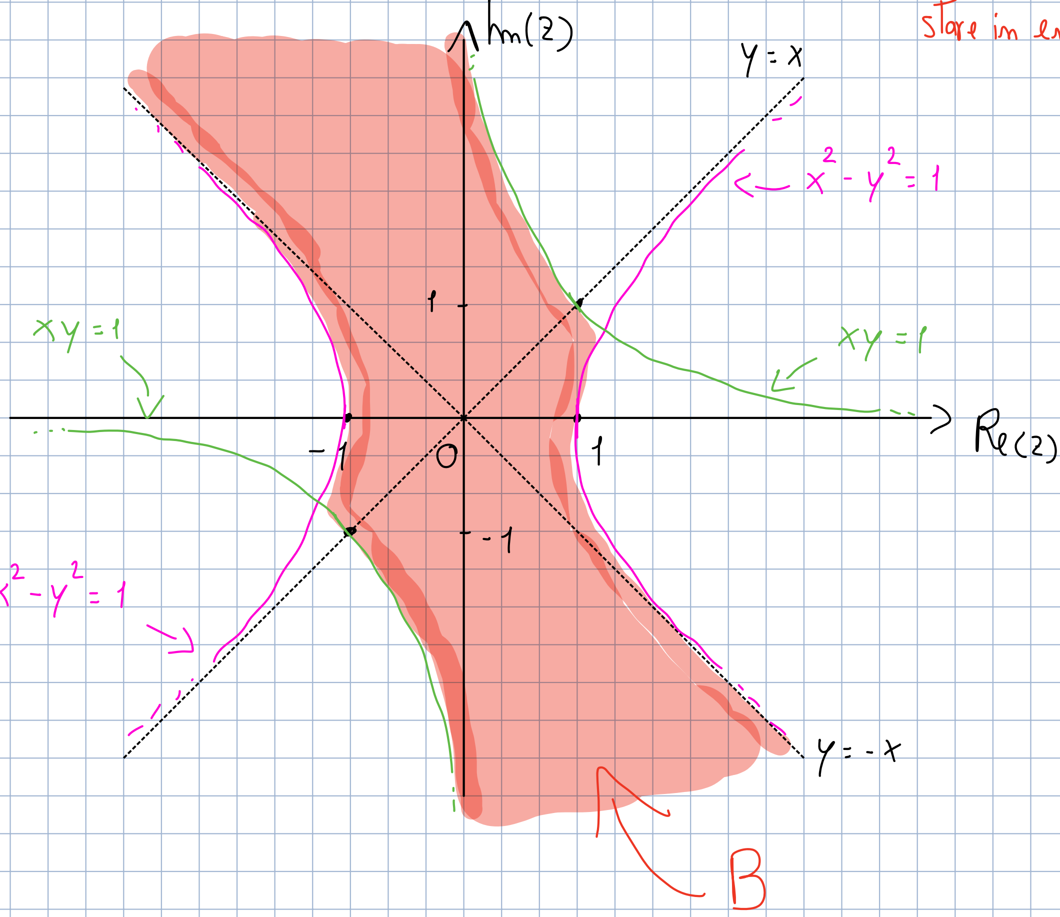
infatti se $x \neq 0$ possiamo scrivere $y \leq \frac{1}{x}$

$\Rightarrow B = \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} : \underbrace{x^2 - y^2 \leq 1}_{} \;,\; \underbrace{xy \leq 1}_{} \right\}$

area delimitata dall'iperbole centrata in 0 e con asintoti $y = \pm x$ (e che passa per 1 e -1)

area delimitata dall'iperbole centrata in 0 e con asintoti $x = 0$ e $y = 0$ (e che passa per $1+i$ e $-1-i$)

↳ per capire che porzione di piano prendere basta provare con un paio di punti, ad esempio 0 deve stare in entrambe le regioni



Es. 4

i) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0 \Rightarrow z^2 - 3iz - (3-i) = 0$

Essendo un equazione di secondo grado senza moduli e/o complessi coniugati, la risolviamo analogamente a quanto faremmo con un'equazione in campo reale, ovvero con la formula risolutiva.

$$z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 4(3-i)}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{-9+12-4i}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{3-4i}}{2}$$

Come scrivere $\sqrt{3-4i}$ in forma algebrica? Cerchiamo $w \in \mathbb{C}$ tale che $w = \sqrt{3-4i}$, ovvero $w^2 = 3 - 4i$

$w = x + iy$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$\hookrightarrow y = -\frac{2}{x}$ se $x \neq 0$, il che è vero perché con $x = 0$ avremmo $0 = -4$.

Sostituendo $t = x^2$ dobbiamo risolvere l'equazione $t^2 - 3t - 4 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = 4$$

Tornando alla variabile x:

Teniamo in mente che z e w sono complessi, ma x e y sono reali.

$t_1 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ non ammette soluzione in campo reale!

$t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

Ricordando che $y = -\frac{2}{x}$ otteniamo

$$y_1 = -\frac{2}{x_1} = 1, \quad y_2 = -\frac{2}{x_2} = -1$$

Dunque le radici quadrate di $3-4i$, ovvero le soluzioni di $w^2 = 3-4i$, sono

$$w_1 = -2+i \quad , \quad w_2 = 2-i \qquad (\text{notiamo che } w_2 = -w_1)$$

Tornando infine alle soluzioni dell'equazione di partenza, abbiamo:

$$z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{3-4i}}{2} = \frac{3i \pm (2-i)}{2} \implies z_1 = \frac{3i-2+i}{2} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{3i+2-i}{2} = 1+i$$

ii) $(1+i)z + (1+2i)\bar{z} + 3 - i = 0$

Scriviamo $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ e sostituiamo

$$(1+i)(x+iy) + (1+2i)(x-iy) + 3 - i = 0$$

$$\underline{x} + \cancel{iy} + \underline{ix} + i^2y + \underline{x} - \cancel{iy} + \underline{2ix} - 2i^2y + 3 - i = 0$$

$$2x + 3ix - y + 2y + 3 - i = 0$$

$$2x + y + 3 + i(3x-1) = 0$$

Un numero complesso è uguale a 0 $\iff$ sia parte reale che immaginaria sono uguali a 0.

$$\implies \begin{cases} 2x+y+3 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \cdot 1/3 + y + 3 = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3} \\ x = 1/3 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è $z = \frac{1}{3} - \frac{11}{3}i$

Es. 5

$$\bar{z}\, z^2 + |z|^2 = 2z$$

Risoluzione 1

Ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, sostituiamo e mettiamo z in evidenza:

$$\bar{z}\, z^2 + z\bar{z} - 2z = 0$$

$$z(\bar{z}\, z + \bar{z} - 2) = 0$$

Dunque $z_1 = 0$ è una prima soluzione. Le altre sono le soluzioni di:

$$\bar{z}\, z + \bar{z} - 2 = 0$$

$$z = x + iy \Rightarrow (x - iy)(x + iy) + x - iy - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - 2 - iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} = -2 \\ = 1 \end{cases} \\ y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono dunque $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1$.

Risoluzione 2

Se non ricordiamo che $z\bar{z} = |z|^2$, scriviamo subito $z = x + iy$ e sostituiamo

$$(x - iy)(x + iy)^2 + x^2 + y^2 = 2(x + iy)$$

$$(x - iy)(x^2 - y^2 + 2ixy) + x^2 + y^2 = 2x + 2iy$$

$$x^3 - xy^2 + 2ix^2y - iyx^2 + iy^3 - 2i^2xy^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$x^3 - xy^2 + 2ix^2y - iyx^2 + iy^3 + 2xy^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - 2x + i\left(x^2y + y^3 - 2y\right) = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ \underbrace{x^2y + y^3 - 2y = 0} \end{cases}$$

$\hookrightarrow y\left(x^2 + y^2 - 2\right) = 0$

$\hookrightarrow y = 0$ oppure $y^2 = 2 - x^2$

- $y = 0 \implies x^3 + x^2 - 2x = 0$

$$x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$$

- $y = 2 - x^2 \implies x^3 + x\left(2 - x^2\right) + \cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2} - 2x = 0$

$$\cancel{x^3} + \cancel{2x} - \cancel{x^3} + 2 - \cancel{2x} = 0$$

$$2 = 0 \rightarrow \text{falso, quindi } \nexists \text{ soluzioni del tipo } y^2 = 2 - x^2.$$

Le soluzioni sono dunque solo quelle con parte immaginaria nulla

$\hookrightarrow z_1 = 0,\ z_2 = -2,\ z_3 = 1.$

Es. 6

i) $(-1+i)^{-5} = \dfrac{1}{(-1+i)^5}$

Ricordiamo la formula del biomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a^{n-K} b^K$

$$\Rightarrow (-1+i)^5 = \binom{5}{0}(-1)^5 + \binom{5}{1}(-1)^4 i + \binom{5}{2}(-1)^3 i^2 + \binom{5}{3}(-1)^2 i^3 + \binom{5}{4}(-1)^1 i^4 + \binom{5}{5} i^5$$

$$= -1 + 5i + \frac{5!}{2!\,3!}(-1)(-1) + \frac{5!}{2!\,3!}(1)(-i) - 5 + i$$

$$= -1 + 5i + 10 - 10i - 5 + i = 4 - 4i$$

[Se non ricordiamo il binomio di Newton possiamo scrivere $(-1+i)^5 = (-1+i)^2(-1+i)^2(-1+i)$
e lavorare con i quadrati]

Dunque

$$\frac{1}{(-1+i)^5} = \frac{1}{4-4i} = \frac{1}{4-4i} \cdot \frac{4+4i}{4+4i} = \frac{4+4i}{4^2+4^2} = \frac{4+4i}{32} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} i$$

ii) $\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^3$

$$(2-i)^3 = 8 + 3(2)^2(-i) + 3(2)(-i)^2 - (i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$$

$$(2+i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^3 = \frac{2-11i}{2+11i} = \frac{2-11i}{2+11i} \cdot \frac{2-11i}{2-11i} = \frac{(2-11i)^2}{2^2+11^2} = \frac{4-44i-121}{125}$$

$$= \frac{-117-44i}{125} = -\frac{117}{125} - \frac{44}{125} i$$