Lezione 9 - 13/10/2025

Esistenza dell'estremo superiore

$\Downarrow$

- proprietà di Archimede
- densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$
- i teoremi di Cantor sugli intervalli incapsulati.

Es sia $E \subseteq \mathbb{R}$, siano $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

supponiamo che m_1 e m_2 siano 2 massimi per E.

Dimostrare che $m_1 = m_2$

m è massimo di E se $\left\{ \begin{array}{l} m \in E \\ \forall x \in E, \quad x \leq m \end{array} \right\} *$

applico $(*)$ a $\left. \begin{array}{l} m_1 \text{ al posto di } m \\ m_2 \text{ al posto di } x \end{array} \right\} \Rightarrow \underset{\text{elemento di } E}{m_2} \leq \overset{\text{massimo}}{m_1}$

scambio m_2 con m_1 ottengo $\underset{\text{elemento}}{m_1} \leq m_2$ ← massimo

$\Rightarrow m_2 = m_1$

fine

diremo "il massimo" e non "un massimo"

(il massimo e il minimo sono unici)

Esempio $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sia $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

diciamo $C = \{ a+b : a \in A, b \in B \}$

Dimostrare che C è sup. limitato

e $\sup C = \alpha + \beta$

Svolgimento.

$\forall a \in A, \quad a \leq \alpha$

$\forall b \in B, \quad b \leq \beta$

$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a+b \leq \alpha + \beta$

$\Rightarrow \forall c \in C, \quad c \leq \alpha + \beta$ (perché $c = a+b$ per qualche a e b)

$\Downarrow$

quindi C è superiormente limitato

e in particolare $\alpha+\beta$ è un maggiorante

(uso le 2 proprietà del sup di E.

la 2° $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in E : \bar{a} > \alpha - \varepsilon$)

uso questa proprietà per A e per B

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \alpha - \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{b} \in B : \bar{b} > \beta - \varepsilon/2$

faccio la somma

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \begin{array}{l} \exists \bar{a} \in A \\ \exists \bar{b} \in B \end{array} \ \text{t.c.} \quad \bar{a} + \bar{b} > (\alpha+\beta) - \varepsilon}$$

$$\underbrace{\text{cioè} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\bar{a}+\bar{b}}{\overset{}{\bar{c}}} \in C : \bar{c} > (\alpha+\beta) - \varepsilon}$$

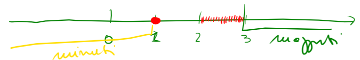
è la 2ª proprietà del sup per C

$\Rightarrow \alpha + \beta = \sup C$

Es. Sia $E = \{1\} \cup (\mathbb{Q} \cap]2,3[)$

determinare
- l'insieme dei maggioranti e dei minoranti
- dire se E ha massimo o minimo
- trovare sup e inf di E

Svolgimento



maggioranti di E $= E^* = [3, +\infty[$

minoranti di E $= E_* =]-\infty, 1]$

max E non esiste (se $x > 3$ non appartiene a E; se $x = 3$ " " ; se $x < 3$ tra x e 3 ci sono elementi di E (per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$))

$\min E = 1$

$\inf E = 1$

$\sup E = 3$ $\quad \forall x \in E,\ x \leq 3$

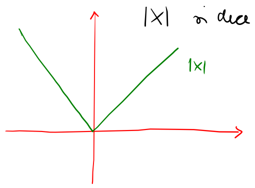
$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in E : \bar{x} > 3 - \varepsilon$ ← sempre per la densità

Funzione valore assoluto

def. La funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

si chiama funzione valore assoluto

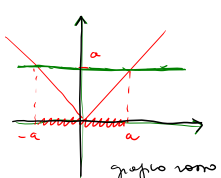
$|x|$ si dice "valore assoluto di x"



proprietà

- $\forall x \in \mathbb{R},\quad |x| \geq 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| \cdot |y|$

fare la verifica con i 4 casi: $x,y \geq 0$; $x \geq 0, y < 0$; $x < 0, y \geq 0$; $x < 0, y < 0$

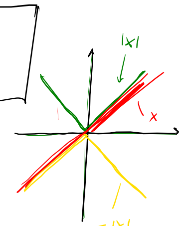


- sia $a \geq 0$ allora $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

grafico rosso sotto il grafico verde ciò accade per $-a \leq x \leq a$

fare la verifica nei casi $x \geq 0$, $x < 0$

- (disuguaglianza triangolare) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$



verifica: so che $-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

sommo $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

da cui $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Esercizio: risolvere $|x+1| - x = 3$

$\boxed{|x+1| = 3+x}$

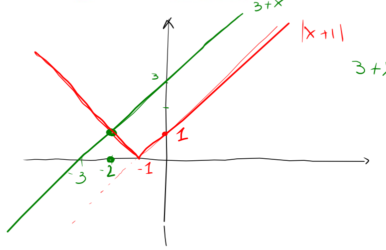
$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = x+3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ 1 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ 2x = -4 \end{cases} \quad x = -2$

$\emptyset$

Soluzione: $x = -2$

$\boxed{|x+1| = 3+x}$



3+x

dove si incontrano i grafici?

$\boxed{x=-2}$

Es. disegnare il grafico di $|x-2|+|x+2|$

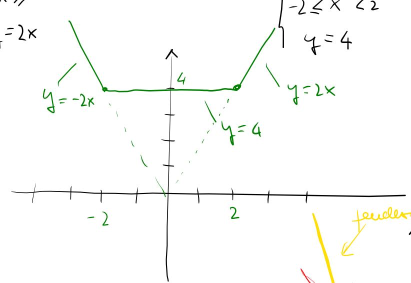
$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ \text{disegno } x-2+x+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 < 0 \\ \text{disegno } x-2+(-x-2) \end{cases}$

$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+2 \geq 0 \\ \text{disegno } -(x-2)+x+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+2 < 0 \\ \text{disegno } -(x-2)-(x+2) \end{cases}$

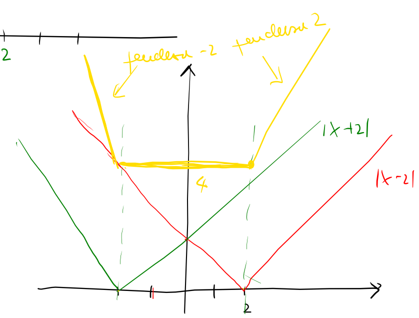
$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ y = 2x \text{ disegno} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -2 \\ y = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < -2 \\ -2x = y \end{cases}$

$\emptyset$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x < 2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -2 \\ y = -2x \end{cases}$



$y = |x-2| + |x+2|$



Funzioni potenza e funzioni radice

def. sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

definiamo $p_n : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

$x \longmapsto p_n(x) = x^n$

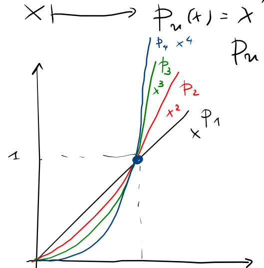
p_n: funzione "potenza n-esima"

$p_1(x) = x$

$p_2(x) = x^2$

$p_3(x) = x^3$

⋮



queste funzioni sono → strettamente crescenti ⇒ iniettive

$(x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n)$

→ suriettive

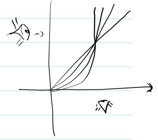
sono iniettive sono invertibili

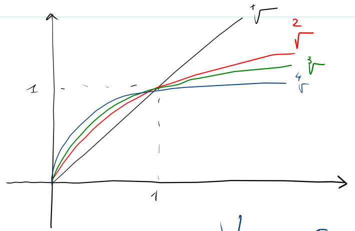
def. $p_n^{-1} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

la diciamo $\sqrt[n]{\ }$ radice n-esima.

def. $p_n^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$

la chiamo $\sqrt[n]{\ }$ radice n-esima,





$\sqrt[n]{\ } : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

$\forall x,y \in [0,+\infty[$ $\quad x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$

attenzione per noi $\sqrt[n]{\ }$ è definita solo in $[0,+\infty[$

Esercizio risolvere $\sqrt{x+1} \geq x-1$

$\left(\sqrt{f(x)} \geq g(x) \right.$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases}$ superfluo

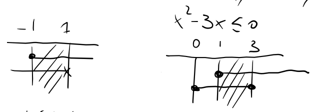
$\Updownarrow$

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \cancel{x+1 \geq 0} \\ x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq (x-1)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + \cancel{1} \leq x + \cancel{1} \end{cases}$

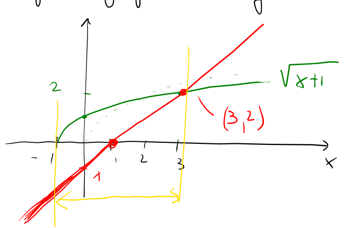
$x^2 - 3x \leq 0$



$-1 \leq x < 1$ $\qquad$ $1 \leq x \leq 3$

$S = [-1, 3]$

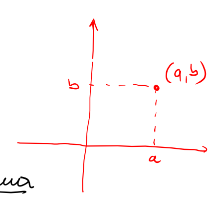
disegno i grafici $\quad y = \sqrt{x+1} \quad y = x-1$



(è il grafico di $\sqrt{x}$ traslato indietro di 1)

NUMERI COMPLESSI

considero $\mathbb{R}^2 = \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R} \}$



su $\mathbb{R}^2$ definisco una funzione di somma

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$((a,b),(a',b')) \longmapsto (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

la sto definendo

la so fare (è la somma di numeri)

ha le solite proprietà

definisco una operazione di prodotto

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$((a,b),(a',b')) \longmapsto (a,b) \circ (a',b') = \cancel{(a \cdot a', bb')}$

$= (aa' - bb', ab' + ba')$

si verifica che $\circ$ (prodotto) è - associativa
- $\exists$ neutro $(1,0)$

definiamo una operazione di prodotto

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((a,b),(a',b')) \longmapsto (a,b)\cdot(a',b') = \cancel{(a\cdot a', bb')}$$

$$= (aa'-bb',\ ab'+ba')$$

si verifica che $\underset{\text{prodotto}}{\circ}$ è
- associativa
- $\exists$ neutro $(1,0)$
- $\exists$ inverso

prendo (a,b) cerco (x,y) t.c. $(a,b)\circ(x,y) = (1,0)$

$(a,b) \neq (0,0)$

$(ax-by,\ ay+bx)$

$$\begin{cases} ax - by = 1 & \text{molt per } a \\ ay + bx = 0 & \text{molt. per } b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ aby + b^2y = 0 \end{cases}$$

$$(a^2+b^2)x = a \qquad x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

quindi $\boxed{(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)}$

definiamo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ lo chiamo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$

notazione invece di scrivere (a,b) scrivo $a\cdot 1 + ib = \underset{\text{parte reale}}{a} + i\overset{\text{parte immaginaria}}{b}$

dove $\boxed{i = (0,1)}$ $1 = (1,0)$

$$i\cdot i = (0,1)\circ(0,1) = (0-1,\ 0+0) = (-1,0) = -1(1,0)$$

cioè $\boxed{i^2 = -1}$ i unità immaginaria.