

che base si utilizza di solito nelle funzioni esponenziali?

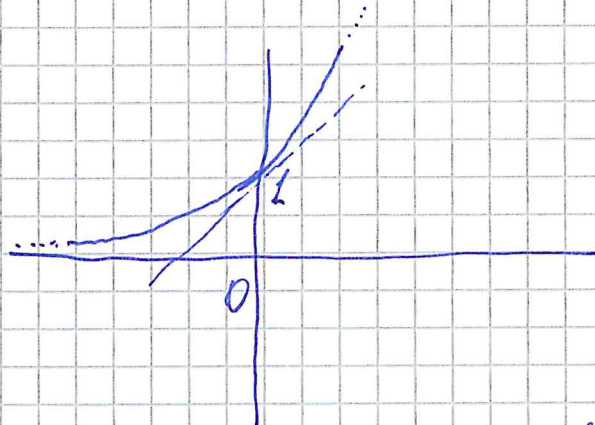
-) base 10 si utilizza soprattutto nella raccolta dati, perché corrisponde al sistema decimale.

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \text{ ecc.}$$

-) base e "numero di Nepero".
È un numero irrazionale,

$$e = 2,7172 \dots$$

Si usa perché come vedremo in seguito, la funzione e^x ha la proprietà che la retta tangente al grafico nel punto $(0, 1)$ è inclinata di 45° .



Questo rende più semplici molte formule teoriche. La base e si utilizza in matematica e fisica.

MODELLO PER FENOMENI DI SATURAZIONE

$$f(x) = a + b(1 - e^{-k(x-x_0)})$$

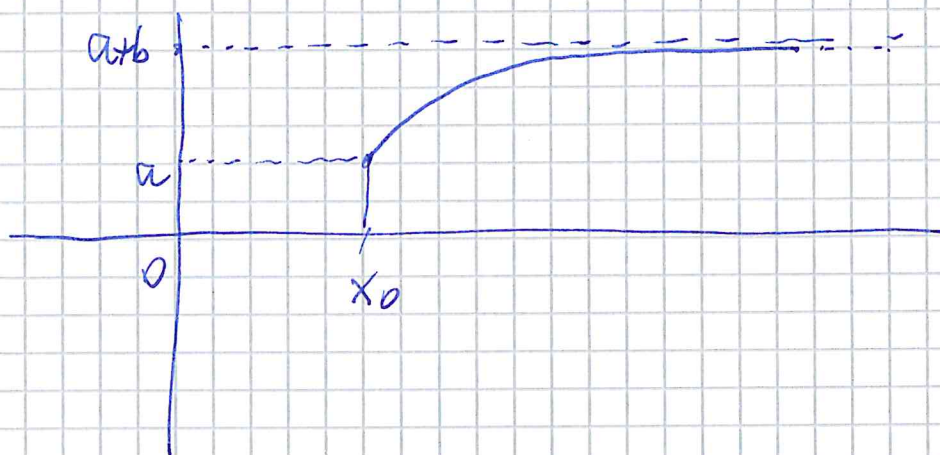
per $x \geq x_0$

si ha : $f(x_0) = a$

$$a \leq f(x) \leq a+b \quad \forall x \geq x_0$$

f crescente

per x sempre più grande,
 $f(x)$ "tende" al valore $a+b$



In questi fenomeni si vuole modellizzare
a partire da un dato al tempo
iniziale x_0 , ciò nel futuro.

MODELLI LOGISTICI

$$f(x) = a + \frac{b}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \quad x \in \mathbb{R}$$

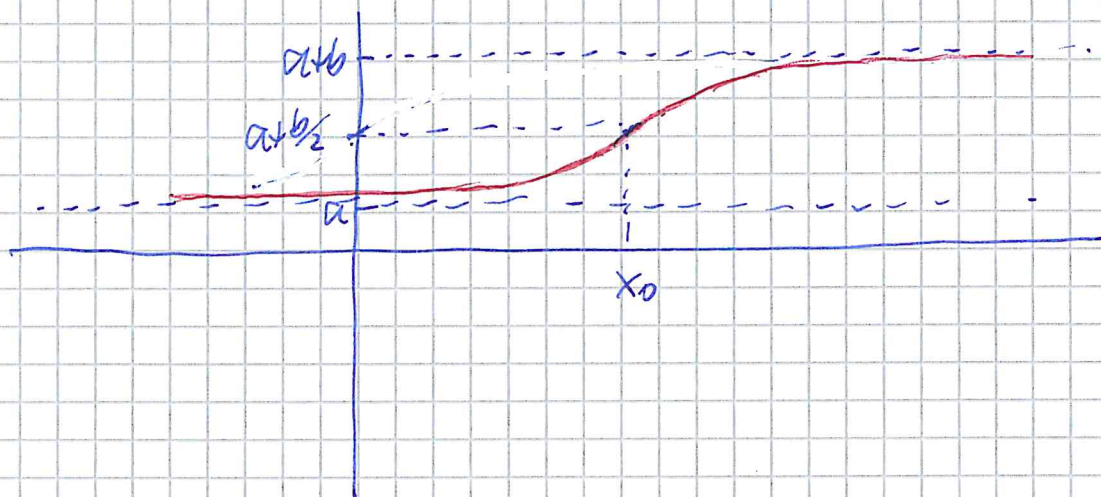
$$a \leq f(x) \leq a+b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) \approx a$ per x molto negativi

$f(x) \approx a+b$ per x molto positivi

$$f(x_0) = a + \frac{b}{2}$$

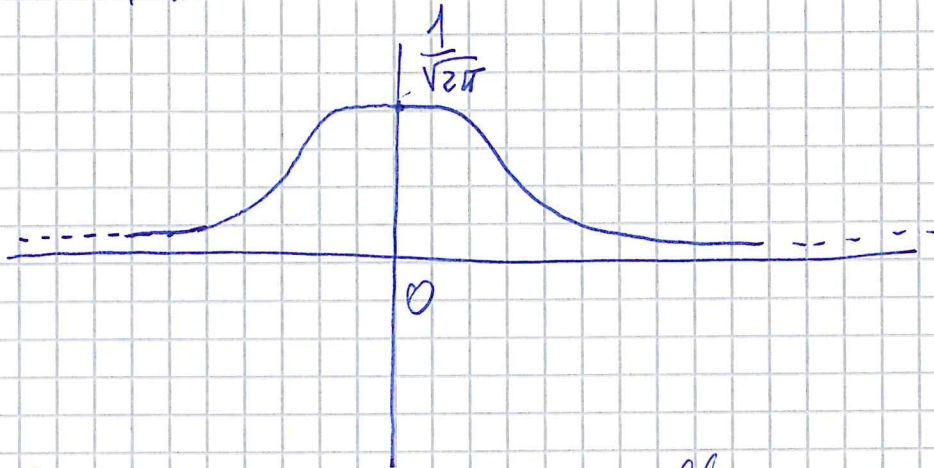
f strettamente crescente.



In questo caso si vuole modellizzare un fenomeno che ha un dato a al tempo $-\infty$, che raggiunge il dato b al tempo $+\infty$.

LA GAUSSIANA

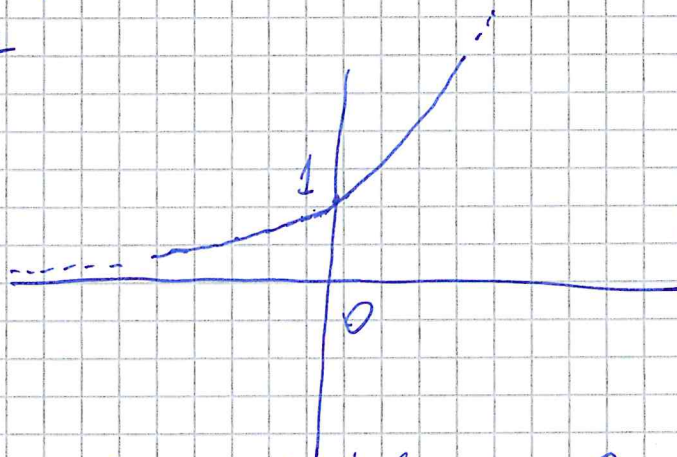
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



È importantissima nella raccolta dei dati e in statistica.

LOGARITMI

Sia $a > 1$. Abbiamo visto che la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è strettamente crescente, quindi iniettiva, e che $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ è suriettiva.



Allora è invertibile: $\exists f^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funzione inversa tale che

$$f^{-1}(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^{f^{-1}(y)} = y \quad \forall y \in]0, +\infty[.$$

La funzione f^{-1} si chiama

"logaritmo in base a " e si

scrive $\log_a y$.

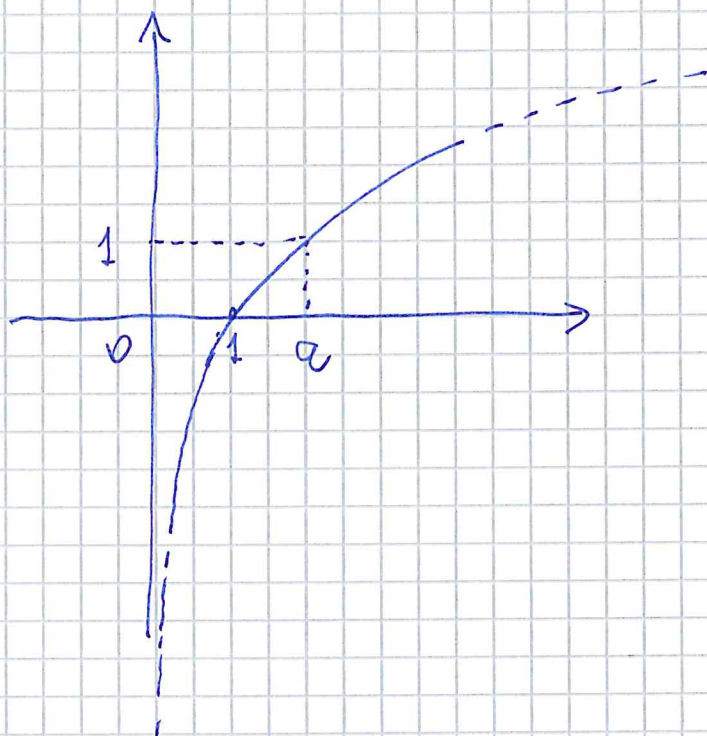
$$a^{\log_a y} = y$$

$$y \in]0, +\infty[$$

$$\log_a a^x = x$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Il logaritmo è fatto così:



$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Proprietà fondamentale:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Infatti

$$\begin{aligned} a^{\log_a (x_1 x_2)} &= x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2} \\ &= a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \end{aligned}$$

Poiché la funzione a^x è invertibile,

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

In fatti

$$x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}$$

$$\mid \Rightarrow (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$$

e quindi $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

Formule per cambio di base

$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$$

infatti

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$$

$$= (a^{\log_a b})^{\log_b x}$$

$$= a^{(\log_a b)(\log_b x)}$$

e quindi $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$

Che base si usano?

1) Nelle raccolte dati si usa la base 10.

si scrive $\log_{10} x = \text{Log } x$

$\rightarrow$ su L maiuscola

2) In matematica e fisica teorica si usa

la base "e" e si scrive

$$\log_e x = \log x = \ln x$$

$\log x$ indica l'ordine di grandezza

Se $\log x = 3, \dots$, si significa che

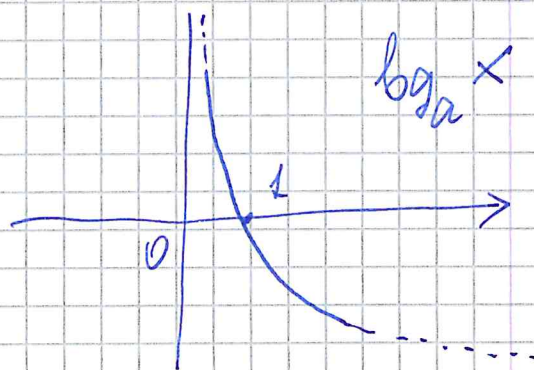
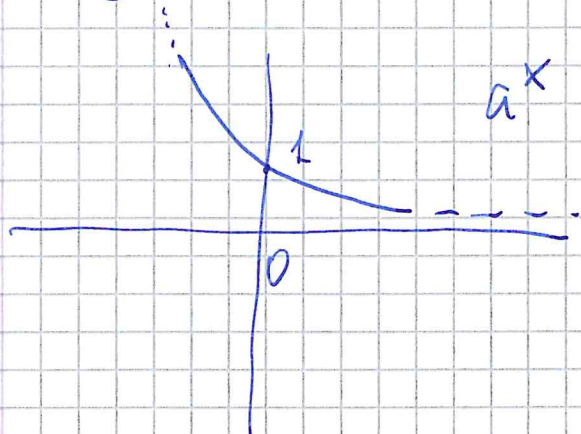
x è dell'ordine di 10^3 , cioè

x è dell'ordine delle migliaia.

BASE $0 < a < 1$

Si possono fare anche i logaritmi
in base a , con $0 < a < 1$,

ma non sono molto usati. Se $0 < a < 1$



Valgono le stesse proprietà.

