

Piani e rette nel piano e nello spazio

Fabio Vlacchi

MIGe Università di Trieste

14 ottobre 2025

Equazione della retta nel piano

Nel piano cartesiano, ogni retta può essere rappresentata da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{equazione cartesiana}}\}$$

con a, b non entrambi nulli; se $b \neq 0$, in forma esplicita:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + q\}$$

dove

- $m = -a/b$ è detto **coefficiente angolare** della retta r
- $q = -c/b$ è l'**intercetta** con l'asse y , ossia il punto dell'asse y di coordinate $(0, q)$ è un punto che appartiene a r .

Equazione della retta nel piano

Nel piano cartesiano, ogni retta può essere rappresentata da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{equazione cartesiana}}\}$$

con a, b non entrambi nulli; se $b \neq 0$, in forma esplicita:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + q\}$$

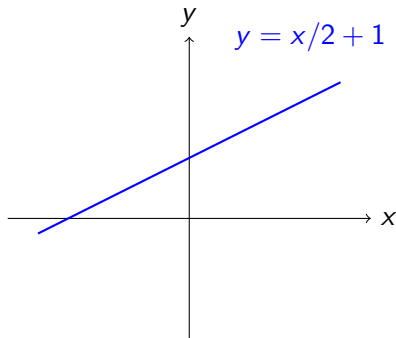
dove

- $m = -a/b$ è detto **coefficiente angolare** della retta r
- $q = -c/b$ è l'**intercetta** con l'asse y , ossia il punto dell'asse y di coordinate $(0, q)$ è un punto che appartiene a r .

Osservazione

In forma esplicita non sono rappresentabili le rette parallele all'asse y (rette verticali). Ogni retta non verticale può essere vista come grafico della funzione $y(x) = mx + q$.

Rappresentazione grafica



Equazione parametrica di retta nel piano

Una retta nel piano può essere anche descritta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{equazione parametrica})$$

dove:

- $(x_0, y_0,)$ è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ è il **vettore direttore**

Equazione parametrica di retta nel piano

Una retta nel piano può essere anche descritta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{equazione parametrica})$$

dove:

- $(x_0, y_0,)$ è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ è il **vettore direttore**

Osservazione

Le rette parallele all'asse y (rette verticali) hanno vettore direttore con $v_1 = 0$, mentre le rette parallele all'asse x (rette orizzontali) hanno vettore direttore con $v_2 = 0$.

Equazione parametrica di retta nel piano

Una retta nel piano può essere anche descritta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{equazione parametrica})$$

dove:

- $(x_0, y_0,)$ è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{O}$ è il **vettore direttore**

Osservazione

Se una retta non è verticale e $y(x) = mx + q$ è l'equazione associata in forma esplicita, allora una equazione parametrica di tale retta è

$$\begin{cases} x = t \\ y = q + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Equazione parametrica di retta nel piano

Una retta nel piano può essere anche descritta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{equazione parametrica})$$

dove:

- $(x_0, y_0,)$ è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{O}$ è il **vettore direttore**

Osservazione

Se una retta passa per i punti distinti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, allora una equazione parametrica di tale retta è

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Equazione parametrica di retta nel piano

Una retta nel piano può essere anche descritta come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{equazione parametrica})$$

dove:

- $(x_0, y_0,)$ è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ è il **vettore direttore**

Osservazione

Due rette nel piano sono parallele se e solo se è possibile trovare una equazione parametrica di entrambe con lo stesso vettore direttore (in particolare, se non sono entrambe verticali e quindi parallele, se e solo se hanno vettori direttori proporzionali e quindi lo stesso coefficiente angolare).

Equazione parametrica di retta nello spazio

Una retta nello spazio può essere descritta in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

dove:

- (x_0, y_0, z_0) è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ è il **vettore direttore** della retta

Equazione parametrica di retta nello spazio

Una retta nello spazio può essere descritta in forma parametrica come:

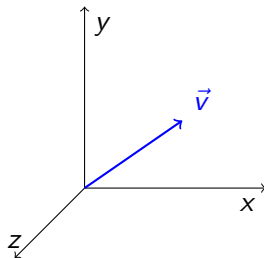
$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

dove:

- (x_0, y_0, z_0) è un punto della retta
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ è il **vettore direttore** della retta

Se una retta passa per i punti distinti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, allora il corrispondente vettore direttore $\vec{v}$ coincide con $\vec{OB} - \vec{OA}$.

Rappresentazione grafica 3D



Distanza.....in “matematiche”

Definition

Una distanza in un insieme E è una *funzione*

$$d : E \times E \rightarrow \mathcal{S}_{\geq 0}$$

con $\mathcal{S}$ insieme numerico ordinato (con ordinamento “ $\geq$ ” e somma “ $+$ ”) tale che

$$\textcircled{1} \quad d(a, a') \geq 0 \text{ e } d(a, a') = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = a';$$

Distanza.....in “matematiche”

Definition

Una distanza in un insieme E è una *funzione*

$$d : E \times E \rightarrow \mathcal{S}_{\geq 0}$$

con $\mathcal{S}$ insieme numerico ordinato (con ordinamento “ $\geq$ ” e somma “ $+$ ”) tale che

$$\textcircled{1} \quad d(a, a') \geq 0 \text{ e } d(a, a') = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = a';$$

$$\textcircled{2} \quad d(a, a') = d(a', a) \quad \forall a, a' \in E;$$

Distanza.....in “matematiche”

Definition

Una distanza in un insieme E è una *funzione*

$$d : E \times E \rightarrow \mathcal{S}_{\geq 0}$$

con $\mathcal{S}$ insieme numerico ordinato (con ordinamento “ $\geq$ ” e somma “ $+$ ”) tale che

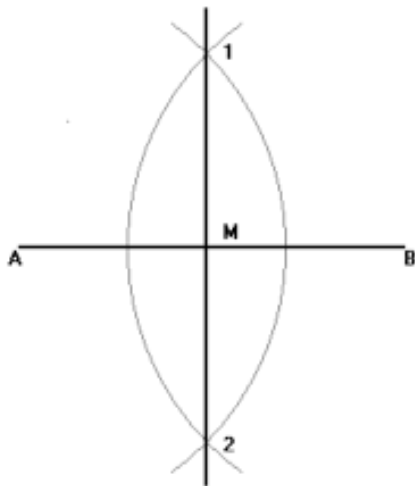
- ① $d(a, a') \geq 0$ e $d(a, a') = 0 \iff a = a'$;
- ② $d(a, a') = d(a', a) \quad \forall a, a' \in E$;
- ③ $d(a, a'') + d(a'', a') \geq d(a, a') \quad \forall a, a', a'' \in E$.

Se $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, presi $A = (x_A, y_A)$ e $A' = (x'_A, y'_A)$, applicando il Teorema di Pitagora, poniamo

$$d_{\mathbb{R}^2}^2(A, A') = (x_A - x'_A)^2 + (y_A - y'_A)^2;$$

più in generale, se $A = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ e $A' = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$d_{\mathbb{R}^N}^2(A, A') = (u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2.$$



Costruzione grafica dell'asse di un segmento

Equazione di piano nello spazio

Un piano nello spazio si può scrivere come:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$$

con a, b, c non tutti nulli.

Posizione reciproca di rette e piani

- **Rette parallele (distinte):** stessi vettori direttori, nessun punto in comune.
- **Rette incidenti:** un solo punto in comune.
- **Rette sghembe:** non complanari, nessun punto in comune.
- **Retta e piano:**
 - la retta giace nel piano,
 - la retta è parallela al piano,
 - oppure la retta interseca il piano in un punto.
- **Piano e piano:**
 - coincidenti,
 - paralleli,
 - incidenti in una retta.