I Sistemi Lineari

K = R PER COMODITÀ

Sistemi: SIGNIFICA CHE CI ASPETTIAMO DI DOVER RISOLVERE PIÙ EQUAZIONI INSIEME, NELLE STESSE VARIABILI

Lineari: SIGNIFICA CHE QUESTE SONO LINEARI IN OGNUNA DI QUESTE VARIABILI [i.e. L'ESPONENTE DELLE VARIABILI È SEMPRE UNO OPPURE ZERO]

Esempio 1:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

R_1 (= RIGA 1)

R_2 (= RIGA 2)

?: COME SI PUÒ RISOLVERE?

SOSTITUIAMO ALLA SECONDA RIGA LA PRIMA RIGA MENO LA SECONDA RIGA

$$\boxed{R_2 \longmapsto R_1 - R_2}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0 + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ORA QUESTA È FACILE!

SOSTITUISCO y QUI

L'INSIEME delle SOLUZIONI È

$$S := \left\{\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

D: COSA È SUCCESSO?

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

UNA MANIPOLAZIONE ALGEBRICA CHE NON CAMBIA LE SOLUZIONI DEL SISTEMA:

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1$$

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0 + 2y = 1 \end{cases}$$

TUTTO GRAZIE A QUESTO ZERO!

NON È IMMEDIATAMENTE CHIARO COME RISOLVERE QUESTO SISTEMA LINEARE [di due EQUAZIONI e due INCOGNITE]

FACILISSIMO INVECE RISOLVERE QUESTA!

1. SE NOI SAPESSIMO SEMPRE QUALI MANIPOLAZIONI ALGEBRICHE FARE PER TRASFORMARE UN SISTEMA IN UNO FACILE DA RISOLVERE

&

2. SE FOSSE SEMPRE POSSIBILE FARE QUESTA MANIPOLAZIONE ALGEBRICA

POTREMMO RISOLVERE FACILMENTE TUTTI I SISTEMI LINEARI!

D: COS'ALTRO ABBIAMO IMPARATO?

R: ABBIAMO **ESIBITO** ALMENO UN SISTEMA LINEARE [IN DUE EQUAZ. E IN DUE INCOGNITE] CHE **AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE** [E CIOÈ LA SOLUZIONE COME VETTORE $\left(x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}\right)$].

NON SOLO! MA RISOLVENDO IL SISTEMA ABBIAMO MOSTRATO CHE NON CI POSSONO ESSERE ALTRE SOLUZIONI. **QUINDI LA SOLUZIONE ESISTE, ED INOLTRE LA SOLUZIONE È UNICA.**

Quindi ne possiamo concludere che:

ALCUNI SISTEMI LINEARI AMMETTONO UN'UNICA SOLUZIONE

Esempio 2:

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 10x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \mapsto \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{cases} 5x + y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$$

POTREBBE ESSERE COMODO DIVIDERE PER DUE

$$\xrightarrow{R_2 \mapsto R_1 - R_2}$$

IN UN SOL COLPO: $R_2 \mapsto R_1 - \frac{1}{2} \cdot R_2$

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 5x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

IN $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ E IN $\mathbb{Z}_p$ CON p PRIMO QUESTO È IMPOSSIBILE!

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI È $S = \emptyset$

ALCUNI SISTEMI LINEARI NON AMMETTONO SOLUZIONI

Esempio 3:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \mapsto 3R_1 - R_2} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$2x - y = -1$$

DICIAMO CHE $x = t \in \mathbb{R}$ FISSATO

$$y = 2t + 1$$

OGNI $(x = t, y = 2t+1)$ PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE.

$$S = \{(t, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^1$$

"IN BIEZIONE" PER ORA

ALCUNI SISTEMI LINEARI AMMETTONO INFINITE SOLUZIONI

INFINITE NEL SENSO DI "TANTE QUANTE $\mathbb{R}^1$" MA POTREBBERO DIVENTARE "TANTE QUANTE $\mathbb{R}^6$"...

Q: Quali manipolazioni algebriche sono permesse?

[QUI "PERMESSE" SIGNIFICA CHE NON CAMBIANO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE]

$\boxed{\text{OE1}}$ OPERAZIONE ELEMENTARE 1: $R_i \mapsto \lambda \cdot R_i, \quad \lambda \in K^\times$

IL CAMPO SENZA LO ZERO

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \mapsto 7 \cdot R_2} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{OE2}}$ OPERAZIONE ELEMENTARE 2: $R_i \longmapsto R_i + \lambda \cdot R_j \quad \lambda \in K^\times$

OSS: UNENDO OE1 E OE2 SI PUÒ FARE $R_i \mapsto \lambda R_i + \mu R_j$, $\lambda \in K^\times, \mu \in K$

$$\begin{cases} -x - 3y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + 2 \cdot R_1} \begin{cases} -x - 3y = 5 \\ 0 - 4y = 12 \end{cases}$$

$\boxed{\text{OE3}}$ OPERAZIONE ELEMENTARE 3: $R_i \longleftrightarrow R_j$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{cases} 2x + y = -7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

È CHIARO CHE ALMENO QUESTE TRE OPERAZIONI ELEMENTARI NON MODIFICANO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA