I Sottospazi Vettoriali

<u>Def</u>: (Sottospazio vettoriale) Sia fissato un campo K ed uno spazio vettoriale V su K. Un SOTTOSPAZIO VETTORIALE W, sottospazio di V è uno SPAZIO VETTORIALE W sullo stesso campo K che sia anche uno SOTTOINSIEME di V. ($W \subseteq V$).

Scriveremo $W \subseteq V$ come insieme e per lo più nel resto del corso intenderemo che uno è un sottospazio vettoriale dell'altro. A parte oggi, dove vedremo per capire meglio degli esempi di $W \subseteq V$ come insieme ma non come sottospazio vettoriale.

NEUTRO DELLA SOMMA.

<u>Oss</u>: W DEVE CONTENERE LO ZERO di V. In particolare W NON PUÓ ESSERE VUOTO.

Oss: Se $W \subseteq V$ come insieme, per controllare che sia sottospazio di V è sufficiente controllare che sia chiuso per somme di vettori e prodotto per scalari:

i) $w_1 + w_2 \in W$

ii) $\alpha \cdot w \in W$

$\forall\, w, w_1, w_2 \in W,\ \forall \alpha \in K$

in particolare prendendo $\alpha = 0 \in K$ troviamo $0 \cdot w = 0 \in W$, in modo simile per l'opposto ....

Esempio 1:

Sia $V = \mathbb{R}^2$ SPAZIO VETTORIALE su $K = \mathbb{R}$.

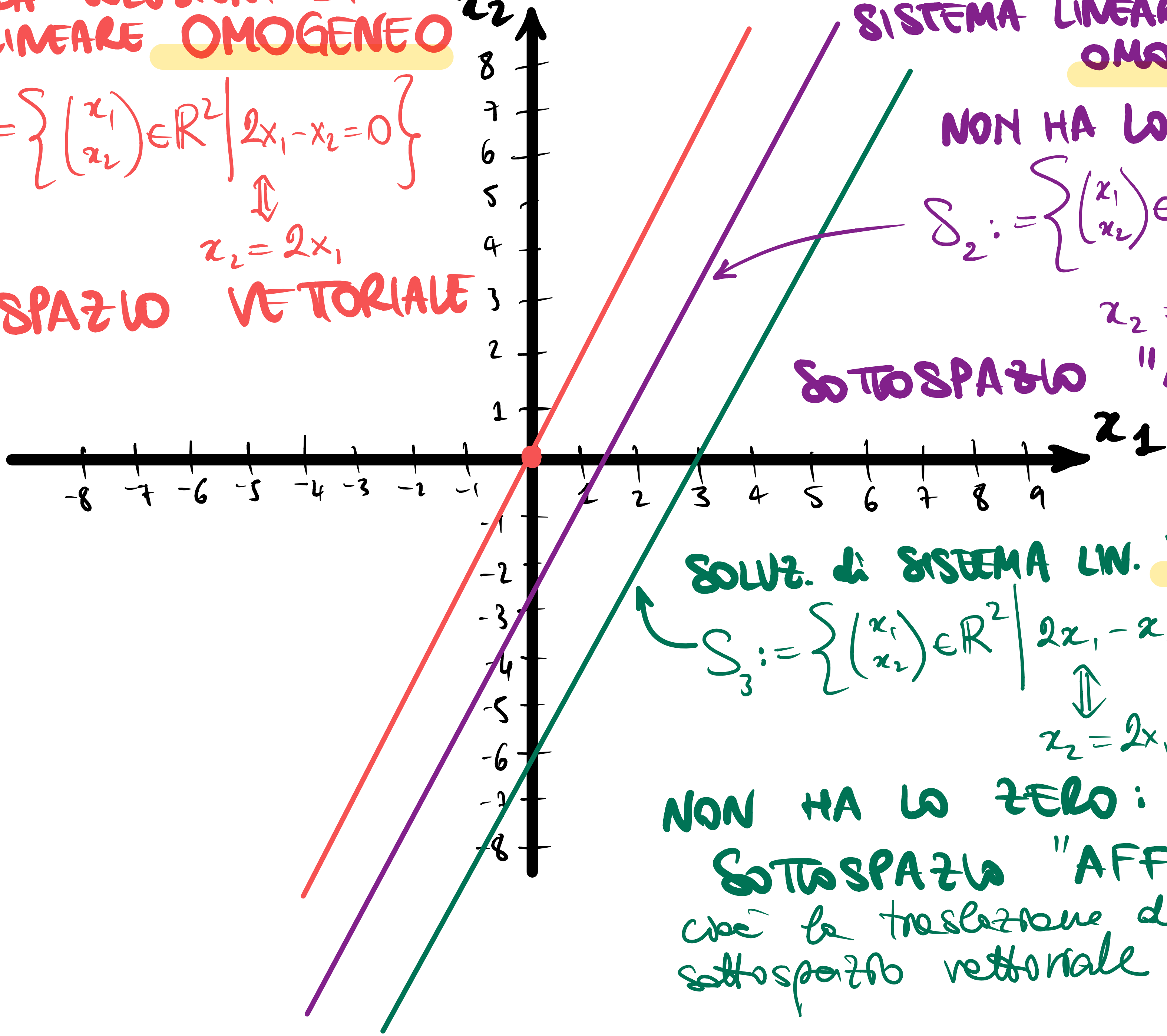
DEFINITO DA SOLUZIONI DI SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 2x_1$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE



DEFINITO da SOLUZIONI di SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO,

NON HA LO ZERO

$$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 3 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 2x_1 - 3$$

SOTTOSPAZIO "AFFINE"

SOLUZ. di SISTEMA LIN. NON OMOGENEO

$$S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 6 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 2x_1 - 6$$

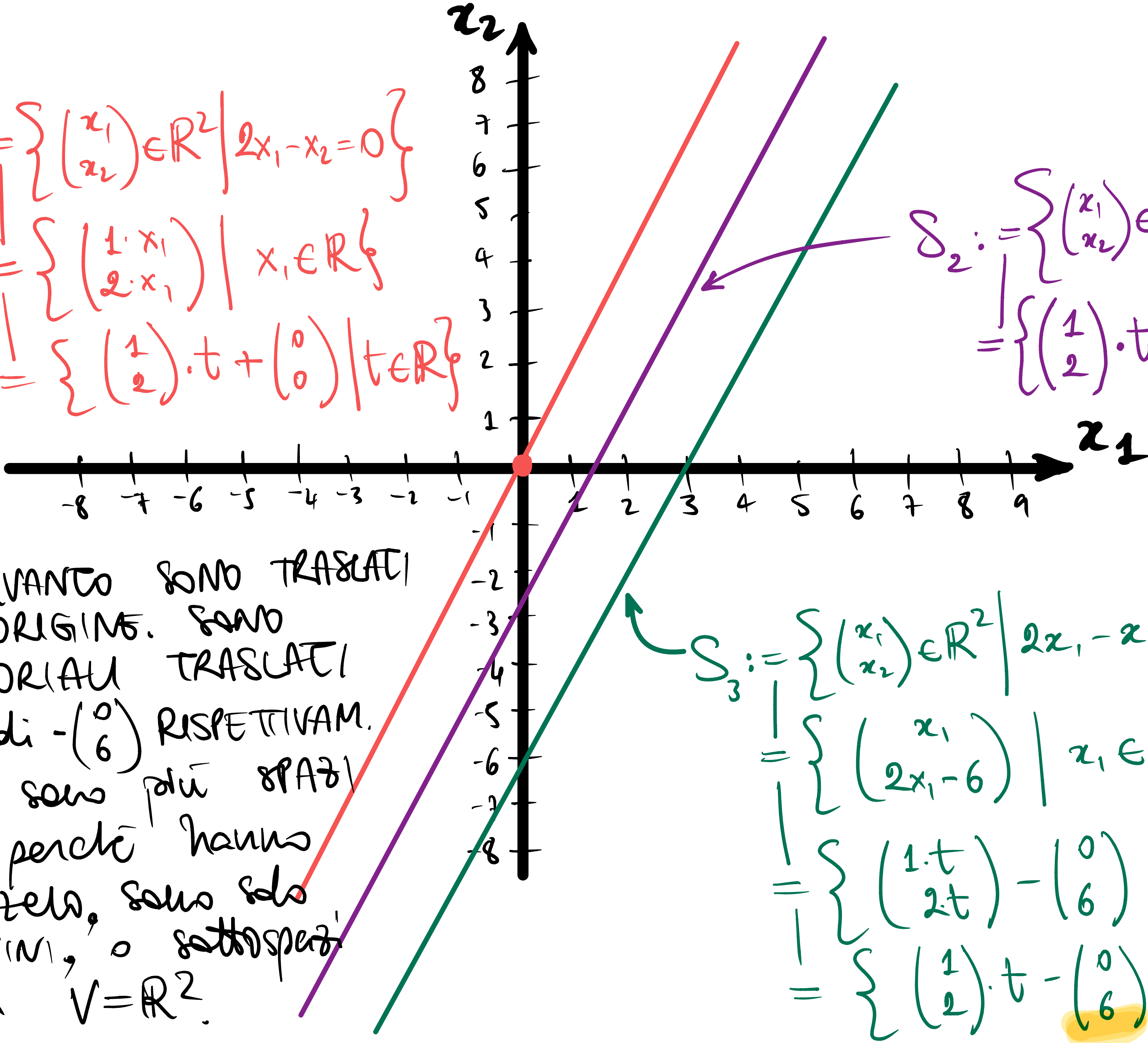
NON HA LO ZERO:

SOTTOSPAZIO "AFFINE"

cioè la traslazione di un sottospazio vettoriale

Esempio 1:

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

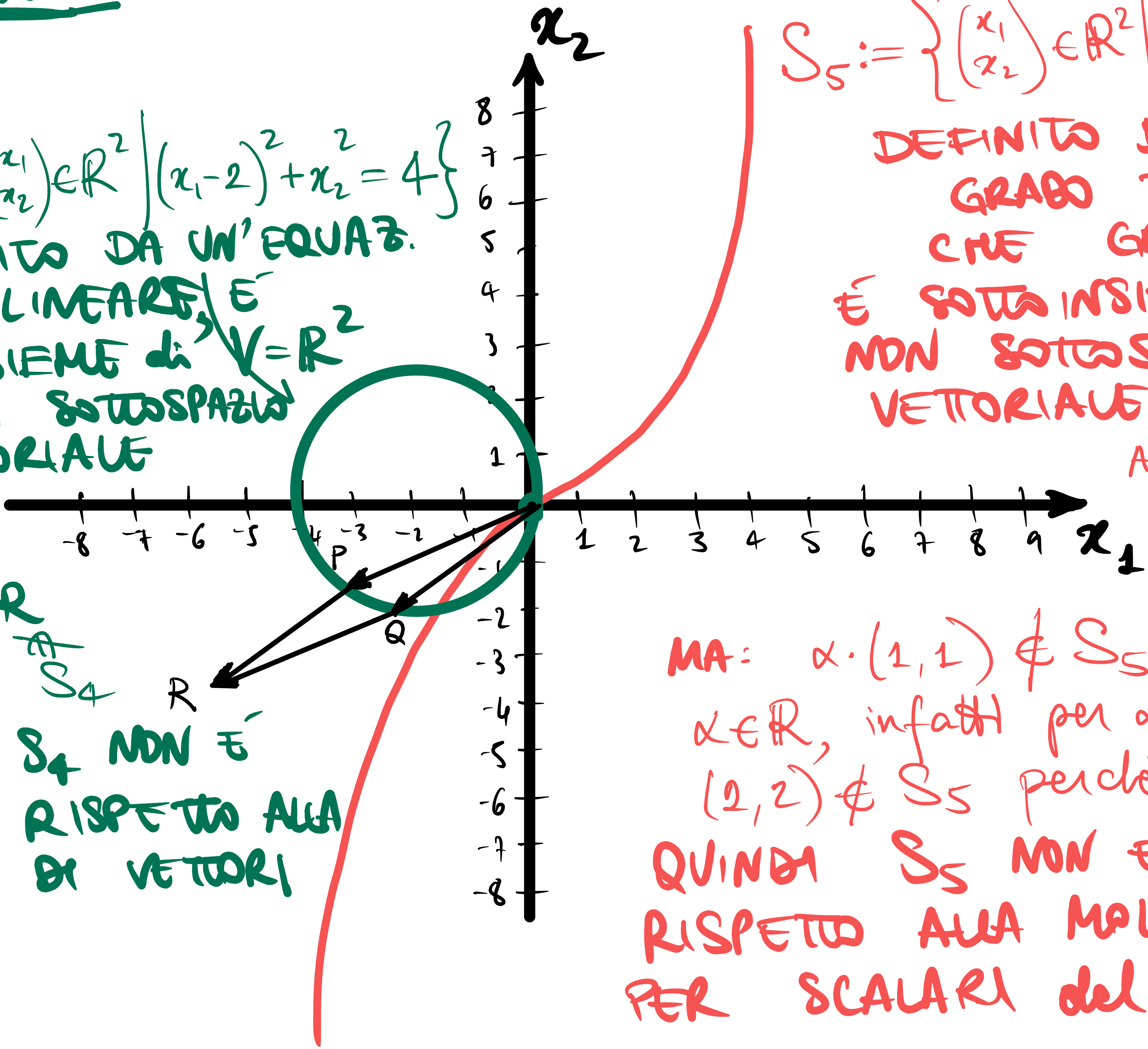


$$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 = 6 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \cdot t \\ 2 \cdot t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ECCO DI QUANTO SONO TRASLATI VIA DALL'ORIGINE. SONO SPAZI VETTORIALI TRASLATI di $-\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e di $-\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ RISPETTIVAM. QUINDI non sono più SPAZI VETTORIALI perché hanno perso lo zero, sono solo SPAZI AFFINI, o sottospazi AFFINI di $V = \mathbb{R}^2$.

Esempio 2:



$S_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1-2)^2 + x_2^2 = 4 \right\}$

DEFINITO DA UN'EQUAZ. NON LINEARE, È SOTTOINSIEME di $V=\mathbb{R}^2$ MA NON SOTTOSPAZIO VETTORIALE

PER ESEMPIO:

$P + Q = R$, con $P \in S_4$, $Q \in S_4$, $R \notin S_4$

QUINDI S_4 NON È CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA DI VETTORI

$S_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 - x_1^3 = 0 \right\}$

DEFINITO DA EQUAZ. GRADO TRE INVECE CHE GRADO UNO, È SOTTOINSIEME MA NON SOTTOSPAZIO VETTORIALE (e nemmeno AFFINE!)

PER ESEMPIO $(1,1) \in S_5$

MA: $\alpha \cdot (1,1) \notin S_5$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, infatti per $\alpha = 2$ il punto $(2,2) \notin S_5$ perché $2^3 \neq 2$.

QUINDI S_5 NON È CHIUSO RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZ. PER SCALARI del CAMPO.

Esempio 3:

Per il TEOREMA di STRUTTURA (delle SOLUZIONI) dei SISTEMI LINEARI, lo spazio

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \,\middle|\, A \cdot x = b \right\} \subseteq K^m =: V$$

n componenti

$A \in M_{n \times m}(K)$ sistema lineare a coeff in K

È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $V \iff b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ed altrimenti è soltanto un sottospazio affine di V in quanto uguale al sottospazio vettoriale

$$W_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \,\middle|\, A \cdot x = 0 \right\} \subseteq K^m =: V$$

TRASLATO PERÒ dentro a V del vettore b!

quindi sappiamo esattamente di quanto è traslato E IN QUALE DIREZIONE E VERSO.

Esempio 4:

$$V := K[x] := \left\{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \;\middle|\; \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in K \end{matrix} \right\}$$

POLINOMI nella variabile x a coefficienti nel campo K.

$$W := K[x]_d := \left\{ a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 \;\middle|\; a_i \in K \right\}$$

Allora $W \subseteq V$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

Dimostrazione: W è chiaramente chiuso rispetto alle somme di due polinomi di grado d e rispetto alla moltiplicazione per gli scalari del campo K $\square$

OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI VETTORIALI:

- INTERSEZIONE $\cap$
- UNIONE $\cup$
- SOMMA $+$
- SOMMA DIRETTA $\oplus$
- PRODOTTO CARTESIANO $\times$

Def: Sia fissato un campo K, uno spazio vettoriale V su K, e due sottospazi vettoriali $U \subseteq V$ e $W \subseteq V$.

- **UNIONE**: $U \cup W := \{v \mid v \in U \vee v \in W\}$
- **INTERSEZIONE** $U \cap W := \{v \in U \wedge v \in W\}$
- **SOMMA**: $U + W := \{v = u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$
- **SOMMA DIRETTA**: $U \oplus W := U + W$ nel caso in cui si abbia $U \cap W = \{0\}$

SICURAMENTE SI INTERSECANO ALMENO NELLO ZERO PERCHÉ LO ZERO STA IN TUTTI GLI SPAZI VETT.

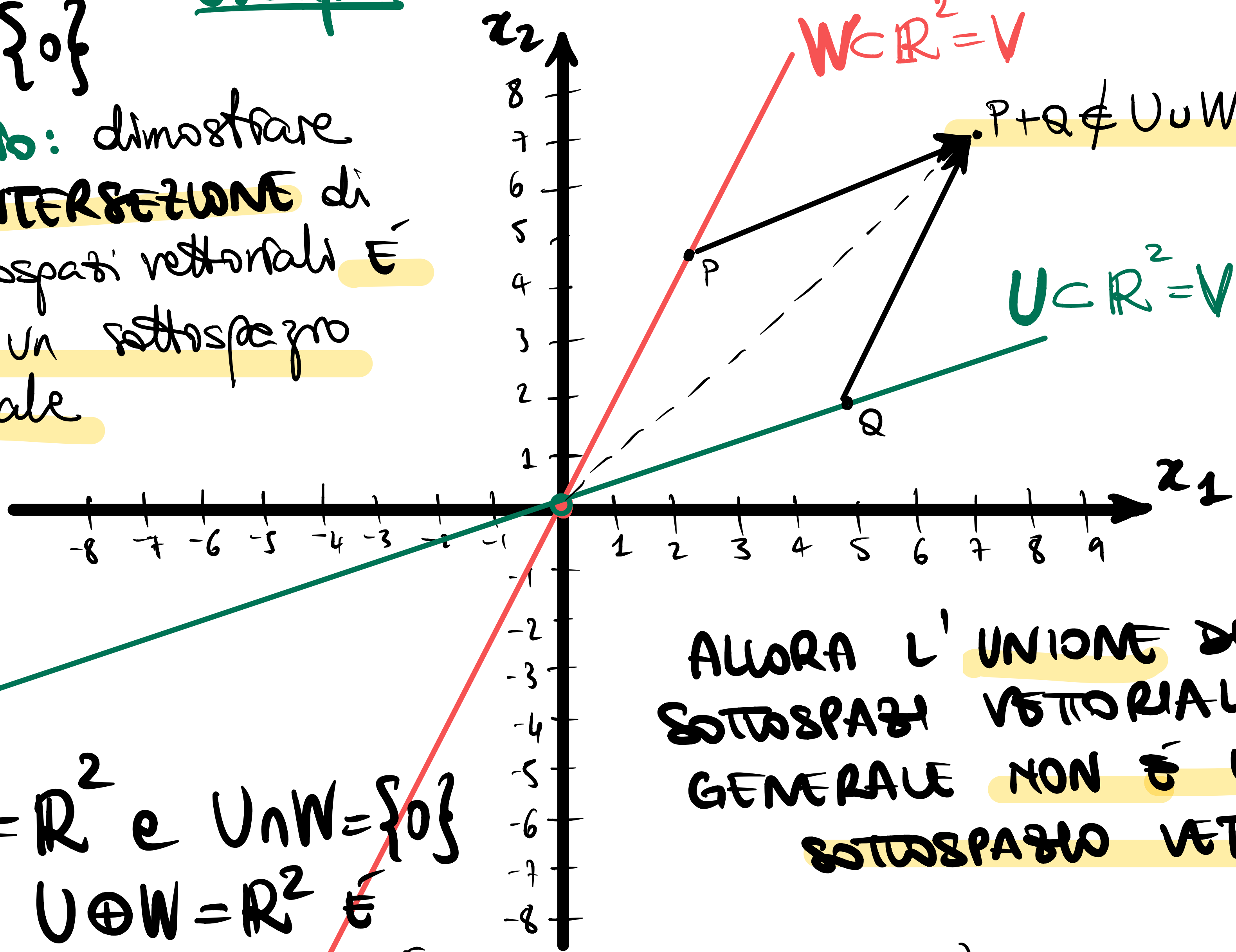
- **SPAZI SUPPLEMENTARI**: U, W supplementari se $U \oplus W = V$.
- **PRODOTTO CARTESIANO**: $U \times W := \{(u, w) \mid u \in U \wedge w \in W\}$

con la somma $(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$ e $\alpha(u, w) = (\alpha \cdot u, \alpha \cdot w)$ ed elemento neutro $(0, 0)$. $\rightsquigarrow$ SPAZIO VETTORIALE.

Esempio:

$U \cap W = \{0\}$

Esercizio: dimostrare che L'INTERSEZIONE di due sottospazi vettoriali È SEMPRE un sottospazio vettoriale



ALLORA L'UNIONE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI IN GENERALE NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE!

$U + W = \mathbb{R}^2$ e $U \cap W = \{0\}$

ALLORA $U \oplus W = \mathbb{R}^2$ È UNA SOMMA DIRETTA [e sono SUPPLEMENTARI].

Esercizio: dimostrare che la somma è sempre un sottosp. vettoriale (e quindi in particolare anche la somma diretta).

PROPOSIZIONE. Siano $U \subseteq V \supseteq W$ su $\mathbb{K}$ come prima.

Allora: $U+W$ è somma diretta $\iff$ ogni $v \in U+W$ si scrive come $v = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{w}$ in modo unico

Dim.: $\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo che:

$$v = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u_1} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{w_1} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u_2} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{w_2}$$

Allora ne possiamo dedurre che:

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

ma $U \cap W = \{0\}$ quindi l'unico elemento in comune a U ed a W è lo ZERO

Quindi $\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ w_2 - w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ w_1 = w_2 \end{cases} \Rightarrow$ v si scrive in modo unico.

$\Leftarrow$ Sia $v \in U \cap W$. Allora prendendo il vettore nullo zero:

$$\underset{\substack{\cap \\ U}}{0} = 0 + \underset{\substack{\cap \\ W}}{0} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{v} - \underset{\substack{\cap \\ W}}{v}$$

Ma ogni vettore si deve scrivere in modo unico, anche il vettore nullo, quindi: $\begin{cases} 0 = v \in U \\ 0 = v \in W \end{cases}$

Allora l'unico vettore in entrambi gli spazi è zero

$$\Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow U + W = U \oplus W$$

$\square$

PROPOSIZIONE: $U \times W = \tilde{U} \oplus \tilde{W}$ dove: $\tilde{U} := \{(u,0) \mid u \in U\}$
$\tilde{W} := \{(0,w) \mid w \in W\}$

In particolare, **OGNI PRODOTTO CARTESIANO È UNA SOMMA DIRETTA.**

Dim: Ogni (u,w) si può scrivere come $(u,w) = (u,0) + (0,w)$.
Inoltre: $\tilde{U} \cap \tilde{W} = \{(0,0)\}$ allora la somma è diretta e per la proposizione precedente la scrittura

$$(u,w) = \underbrace{(u,0)}_{\in \tilde{U}} + \underbrace{(0,w)}_{\in \tilde{W}}$$

è **l'unico modo** di decomporre (u,w) come somma di elementi in $\tilde{U}$ e in $\tilde{W}$ $\square$