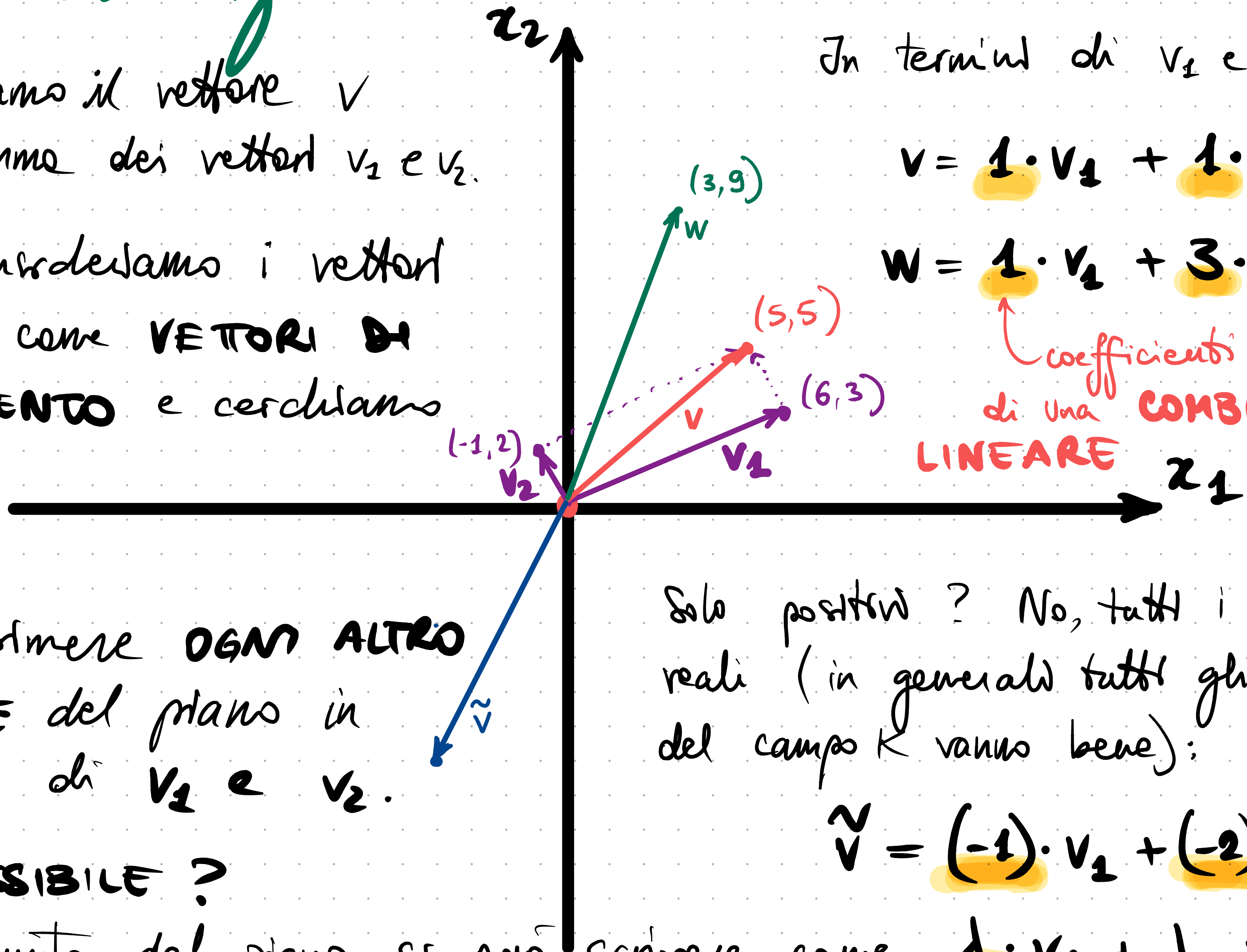
Combinazioni lineari e basi

Consideriamo il vettore v come somma dei vettori v_1 e v_2.

Anzi, consideriamo i vettori v_1 e v_2 come **VETTORI DI RIFERIMENTO** e cerchiamo di esprimere **OGNI ALTRO VETTORE** del piano in termini di v_1 e v_2.

È POSSIBILE?



In termini di v_1 e di v_2:

$$v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$$

$$w = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$$

coefficienti **REALI** di una **COMBINAZIONE LINEARE**

Solo positivi? No, tutti i numeri reali (in generale tutti gli scalari del campo K vanno bene):

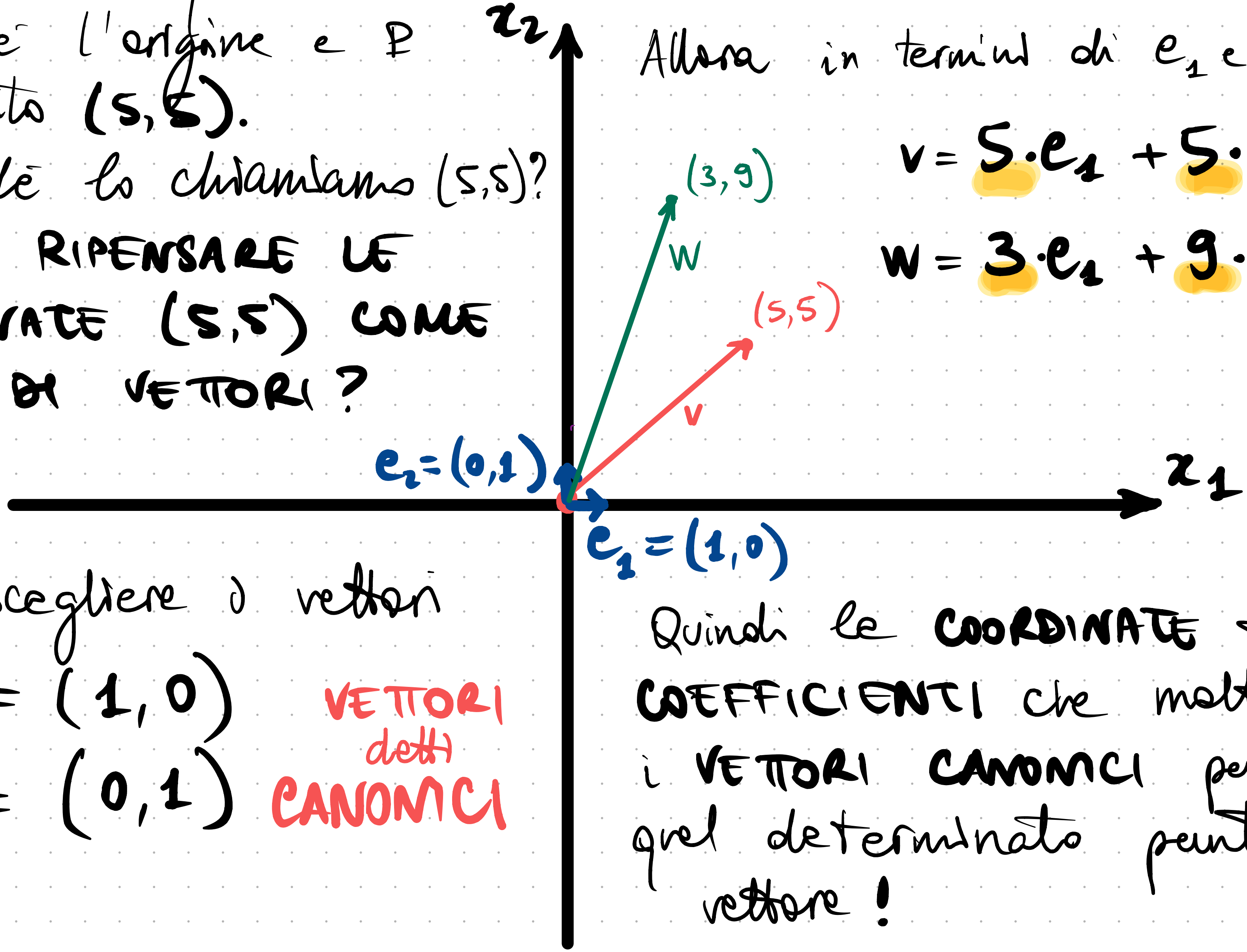
$$\tilde{v} = (-1) \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2$$

Ogni punto del piano si può scrivere come $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$, si dice che **$v_1$ e v_2 INSIEME GENERANO IL PIANO $\mathbb{R}^2$**

Il vettore v corrisponde a $\vec{OP}$ dove O è l'origine e P è il punto (5,5).

Ma perché lo chiamiamo (5,5)?

Possiamo **RIPENSARE LE COORDINATE (5,5) COME SOMMA DI VETTORI?**



Allora in termini di e_1 e di e_2:

$$v = 5\cdot e_1 + 5\cdot e_2$$

$$w = 3\cdot e_1 + 9\cdot e_2$$

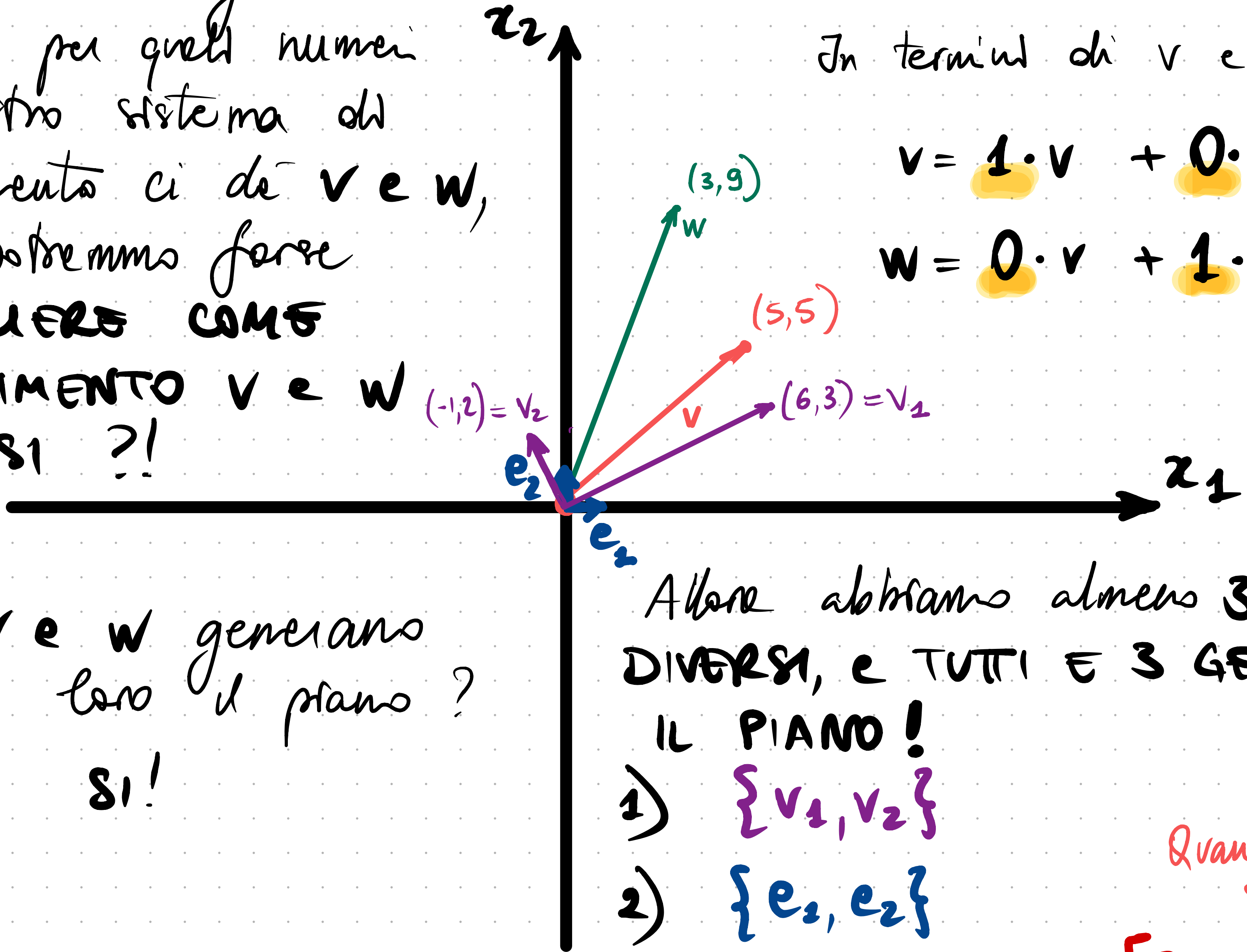
Basta scegliere i vettori

$$\begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases}$$

VETTORI detti **CANONICI**

Quindi le **COORDINATE** sono i **COEFFICIENTI** che moltiplicano i **VETTORI CANONICI** per ottenere quel determinato punto o vettore!

Ma visto che vogliamo trovare per quelli numeri il nostro sistema di riferimento ci dà **v** e **w**, non potremmo forse **SCEGLIERE COME RIFERIMENTO v e w STESSI ?!**



In termini di v e di w:

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}\cdot \mathbf{v} + \mathbf{0}\cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}\cdot \mathbf{v} + \mathbf{1}\cdot \mathbf{w}$$

Ma **v** e **w** generano anche loro il piano ?

SI!

Allora abbiamo almeno **3 RIFERIMENTI DIVERSI**, e **TUTTI E 3 GENERANO IL PIANO!**

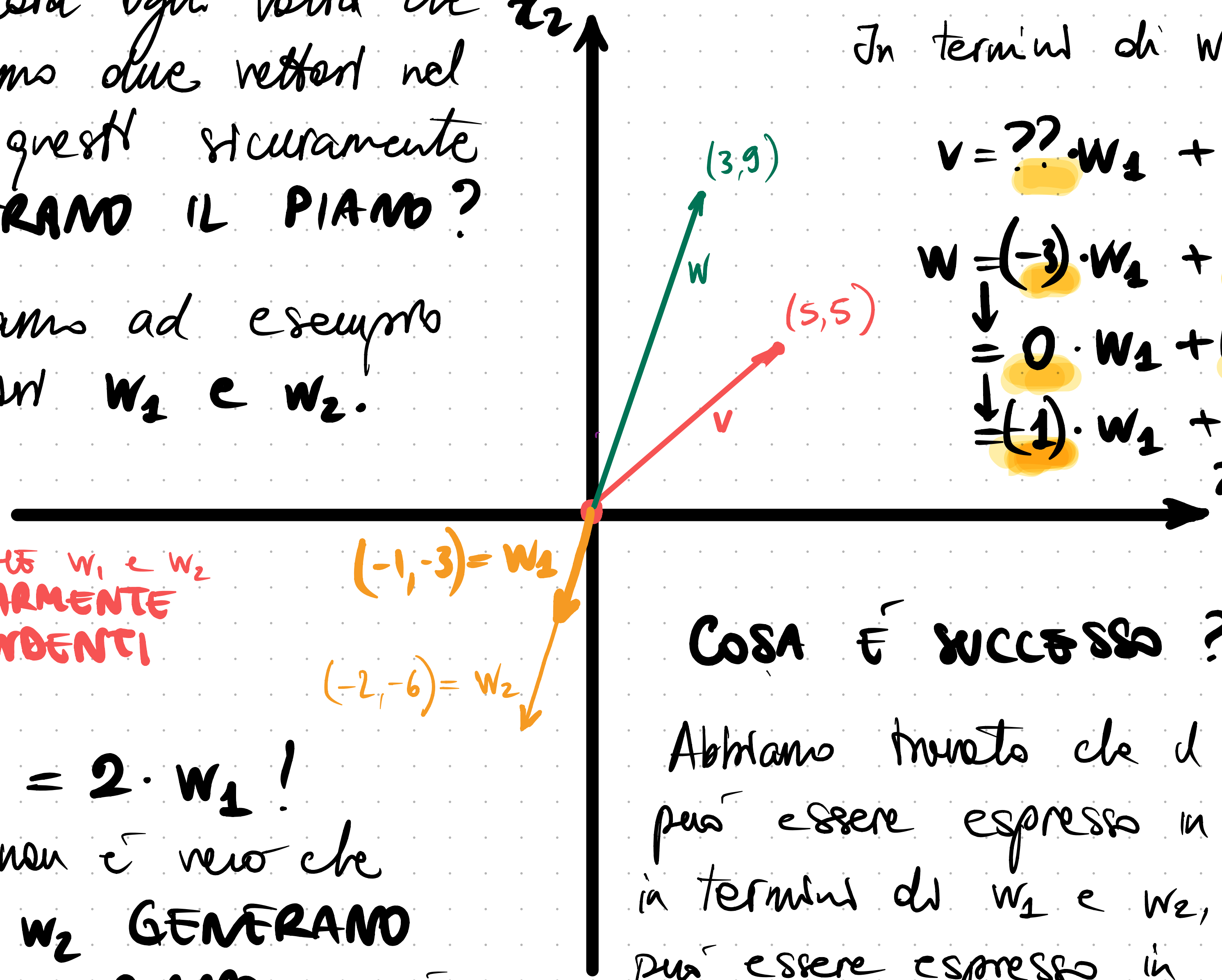
1) $\{v_1, v_2\}$
2) $\{e_1, e_2\}$
3) $\{v, w\}$

Quanti ce ne saranno?

[Risposta breve: infiniti]

Ma allora ogni volta che scegliamo due vettori nel piano, questi sicuramente **GENERANO IL PIANO?**

Prendiamo ad esempio i vettori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$.



In termini di w_1 e di w_2:

$$v = ??\cdot w_1 + ??\cdot w_2$$

$$w = (-3)\cdot w_1 + 0\cdot w_2$$
$$= 0\cdot w_1 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdot w_2$$
$$= (-1)\cdot w_1 + (-1)\cdot w_2 = \ldots\ldots$$

SI DIRÀ CHE w_1 e w_2 SONO **LINEARMENTE DIPENDENTI**

$$w_2 = 2\cdot w_1 \;!$$

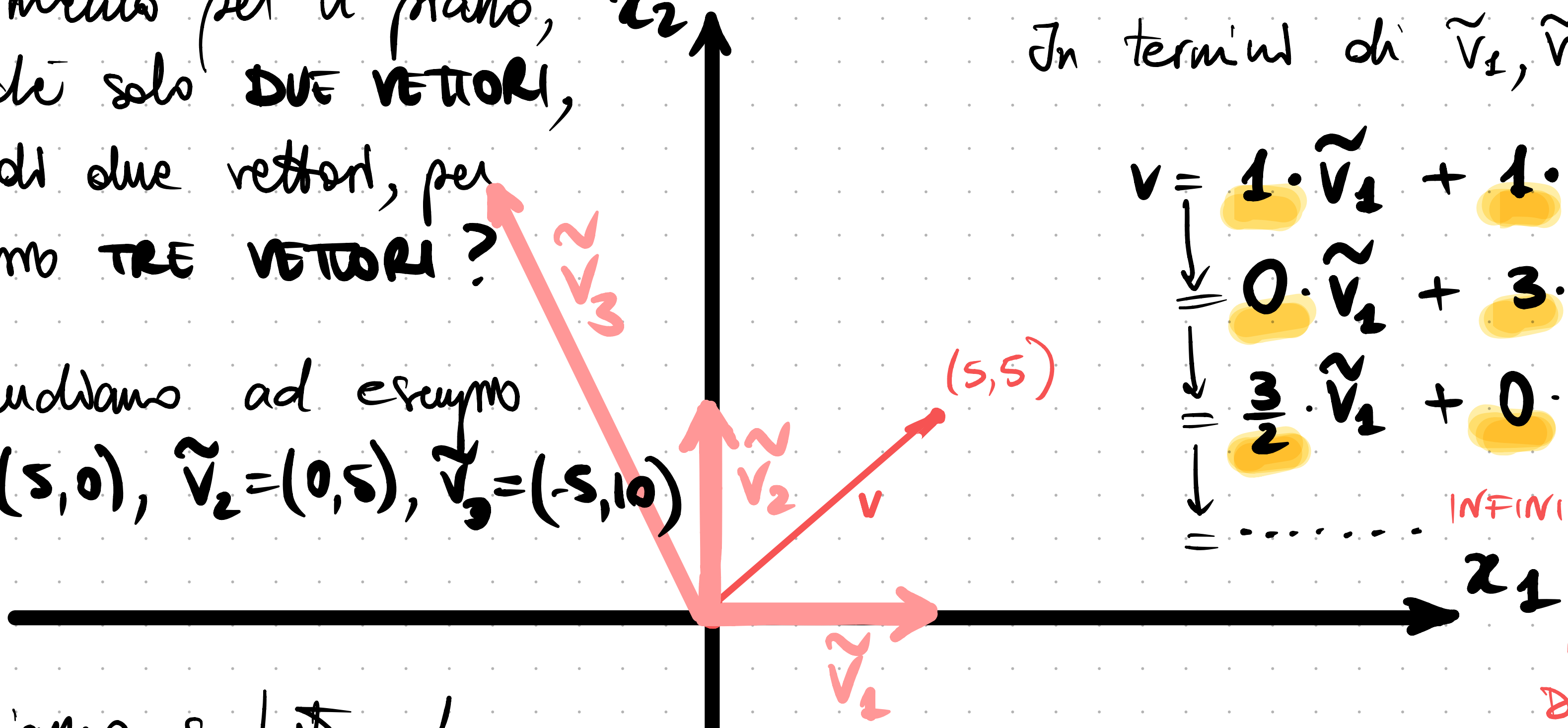
Allora non è vero che w_1 e w_2 **GENERANO L'INTERO PIANO**, ma è vero che **GENERANO SOLO LA RETTA** $x_2 = 3\cdot x_1$

COSA È SUCCESSO ?!

Abbiamo trovato che il vettore **v** non può essere espresso in **NESSUN MODO** in termini di w_1 e w_2, mentre **w** può essere espresso in **INFINITI MODI** in termini di w_1 e di w_2!

Ma cosa succede se prendiamo come riferimento per il piano, anziché solo **DUE VETTORI**, più di due vettori, per esempio **TRE VETTORI**?

Prendiamo ad esempio $\tilde{v}_1=(5,0)$, $\tilde{v}_2=(0,5)$, $\tilde{v}_3=(-5,10)$



In termini di $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$:

$$
\begin{aligned}
v &= 1\cdot\tilde{v}_1 + 1\cdot\tilde{v}_2 + 0\cdot\tilde{v}_3 \\
&= 0\cdot\tilde{v}_1 + 3\cdot\tilde{v}_2 + (-1)\cdot\tilde{v}_3 \\
&= \frac{3}{2}\cdot\tilde{v}_1 + 0\cdot\tilde{v}_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\tilde{v}_3 \\
&= \dots\dots
\end{aligned}
$$

INFINITI ALTRI MODI DI ESPRIMERE V COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$.

vediamo subito che

$$\tilde{v}_3 = (-1)\cdot\tilde{v}_1 + 2\cdot\tilde{v}_2$$

(si dirà che sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** e quindi non sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI**

Intuitivamente, **3 VETTORI PER UN PIANO** sono **TROPPI**, sono **SOVRABBONDANTI**, sono **RIDONDANTI***, insomma **NE BASTANO DUE, DUE VETTORI COME DUE È LA DIMENSIONE DEL PIANO**

*In matematica si dice appunto: **LINEARMENTE DIPENDENTI**