16 ottobre

(sottosuccessione)

Def Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e sia $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora la successione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

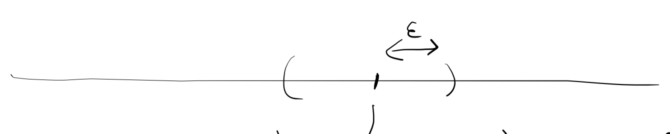
Es $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$

$\{(-1)^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$

$\{(-1)^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{-1, -1, -1, -1, \dots\}$

Esercizi Se $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$ allora $n_k \geq k \quad \forall k\in\mathbb{N}$

Lemma Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$. Allora se $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione, si ha $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = L$.



Dim (nel caso $L\in\mathbb{R}$). $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$ significa che

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon>0$ t.c. $n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$ (1)

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = L$ cioè

$\forall \varepsilon>0 \ \exists M_\varepsilon>0$ t.c. $k > M_\varepsilon \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ (2)

Per dimostrare la (2) devo trovare l' M_ε. Usiamo $M_\varepsilon = N_\varepsilon$

Per $k > M_\varepsilon = N_\varepsilon \Rightarrow n_k \geq k > N_\varepsilon \Rightarrow n_k > N_\varepsilon$

per la (1) $\Longrightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Abbiamo dimostrato (2)

Dimostreremo il teorema degli zeri
per funzioni continue.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

un punto $x_0 \in X$ si dice uno zero di f

se $f(x_0) = 0$

Cioè, gli zeri di f sono le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0.$$

$ax + b = 0 \qquad a \neq 0$

$x = -\frac{b}{a}$

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$

$$x_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad *$$

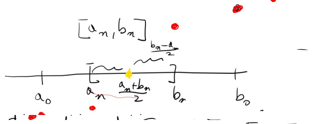
Formule analoghe a $*$ esistono per equazioni
$p(x) = 0$ con p un polinomio ~~con~~ $\deg p \leq 4$.

Se $\deg p(x) \geq 5$ in generale non esiste una
formula analoga a $*$ per esprimere le
soluzioni di $p(x) = 0$ in termini dei coefficienti di p

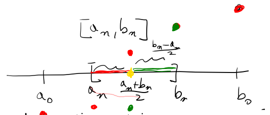
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, \dots, a_n$ sono i coefficienti di p.

Teorema Sia $f \in C^0([a,b])$, $a<b$ in $\mathbb{R}$,
t.c. $f(a)f(b)<0$.
Allora $\exists$;
t.c. $f(x_0)=$



Dim Si . . .
successione $\{[a_n,b_n]\}_{n\geq 0}$, con $[a_0,b_0]=[a,b]$
(quindi $a_0=a$ e $b_0=b$). Supponiamo di avere definito
$[a_0,b_0]\supset \dots \supset [a_n,b_n]$ con $f(a_n)f(b_n)<0$.



Considero il punto mediano di $[a_n,b_n]$, cioè il punto $\frac{a_n+b_n}{2}$ e suppongo anche che $f(a_n)f(b_n)<0$. So che esiste

$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. Se $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$

vuole dire che posso porre $x_0=\frac{a_n+b_n}{2}$. In generale . . . che $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\neq 0$.

Se
$$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\begin{cases} >0 & \text{poniamo } [a_{n+1},b_{n+1}]=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right] \\ <0 & \text{poniamo } [a_{n+1},b_{n+1}]=\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\end{cases}$$

Resta così definita una successione di intervalli $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$

con $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2^1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2^2}=\dots=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$

con $f(a_n)<0<f(b_n)$ $\forall n$

e con $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $\forall n\geq 0$.

$\Rightarrow$ $a_n\leq a_{n+1}$ $\forall n$

$b_n\geq b_{n+1}$ $\forall n$

ed inoltre $\boxed{a_n\leq b_m}$ $\forall n,m$.
$\forall n,m\geq 0$

Fisso $n,m\geq 0$. Sia $k\geq \max\{n,m\}$
so che $a_n\leq a_k<b_k\leq b_m \Rightarrow a_n<b_m$.

Esistono $\lim_{n\to+\infty} a_n=\alpha=\sup\{a_n : n\geq 0\}$

$\lim_{n\to+\infty} b_n=\beta=\inf\{b_n : n\geq 0\}$

Risulta $\alpha=\beta$ perché

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\beta-\alpha \quad \text{(regola della somma)} \\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\beta=\alpha} \stackrel{?}{=} x_0$$

Verifichiamo che $f(x_0)=0$.

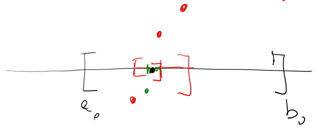
$x_0=\lim_{n\to+\infty} a_n$. Poiché f è continua in x_0

si ho $\lim_{n\to+\infty}\underbrace{f(a_n)}_{\leq 0}=f(x_0)\leq 0$

Analogamente $x_0=\lim_{n\to+\infty} b_n$ e poiché f è continua in x_0
si ha $\lim_{n\to+\infty}\underbrace{f(b_n)}_{\geq 0}=f(x_0)\geq 0$

Da ciò ricaviamo che si ha

$0\leq f(x_0)\leq 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0)=0}$.



<u>Corollario</u> Sia $p(x)$ un polinomio (a coefficienti reali) di grado dispari. Allora $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$p(x_0) = 0.$$

<u>Esempio</u> Se $p(x) = x^2 + 1$ l'equazione

$x^2 + 1 = 0$ non ha radici reali.

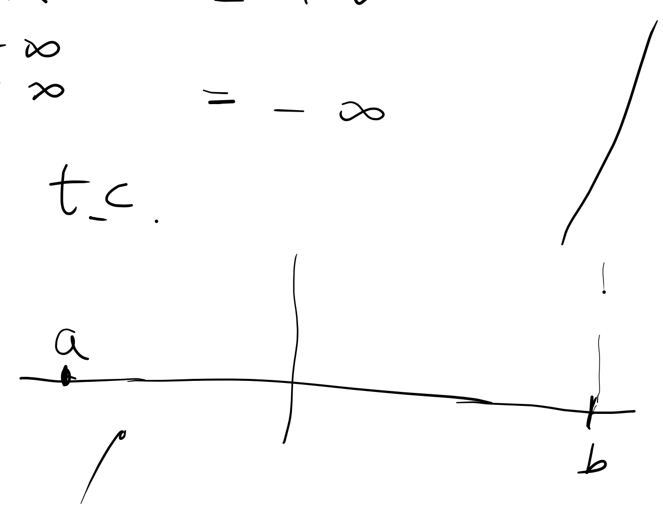
<u>Dim Corollario</u> Possiamo sempre ridurci, per $\deg p = 2n+1$, al caso $p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\frac{1}{2}\left(2x^3 + x + 1\right) = x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} p(x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} x^{2n+1} \begin{array}{l} = +\infty \\ = -\infty \end{array}$$

pertanto esistono $a < b$ t.c.

$$p(a) < 0 < p(b).$$



Siccome $p \in C^0([a,b])$

$\exists\, x_0 \in [a,b)$ t.c.

$$p(x_0) = 0.$$

Def (Continuità) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$

1) se $x_0 \in X'$ allora f è continua in x_0 se

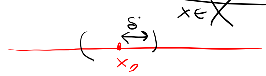
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè (1)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Abbiamo detto che f è sempre continua in un punto $x_0 \in X$ isolato in x_0

2) Diremo che f è continua in $x_0 \in X$ se (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta,\ x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



In un x_0 isolato in X la (2) è banalmente vera se scelgo $\delta_\varepsilon \equiv \delta > 0$ con $\delta > 0$ t.c. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$

allora $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x = x_0$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Nel Teorema degli zeri abbiamo usato il fatto che se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, se $x_0 \in X$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in X e $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ allora, se f è continua in x_0 segue che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ *

Dire che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ significa dire che

$$\forall \delta > 0 \ \exists N_\delta \text{ t.c. } n > N_\delta \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \qquad 1$$

Dire che f è continua in x_0 significa dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad 2$$

Ora voglio dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } n > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad 3$$

Scelgo $M_\varepsilon = N_{\delta_\varepsilon}$

$$n > M_\varepsilon = N_{\delta_\varepsilon} \overset{(1)}{\Longrightarrow} |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon \overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Questa è la (3) che resta dimostrata.