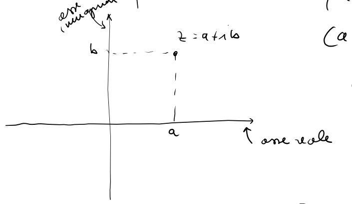
Lezione 11 - 16/10/2025

Numeri complessi



$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b')$

$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

$\quad \| $

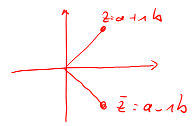
$aa'+i(ab'+ba')+i^2(bb')$

ma $i^2 = -1$

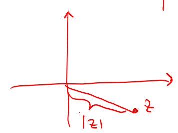
$\dfrac{1}{a+ib} = (a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

$z = a+ib \quad , \quad \bar{z} = a-ib$

complesso coniugato

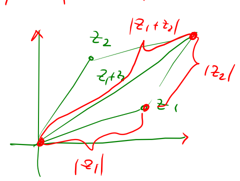


$z = a+ib \quad , \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ modulo

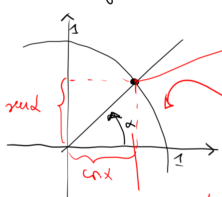


$z = a+ib \quad \begin{cases} a = \operatorname{Re} z \\ b = \operatorname{Im} z \end{cases}$

disuguaglianza triangolare $\quad |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$



Funzioni trigonometriche



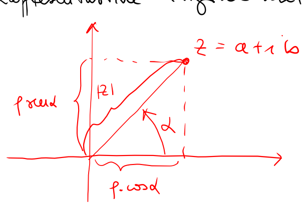
$(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

misurato in radianti coincide con la lunghezza (orientata) dell'arco

6) $\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\quad \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

• Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi



$|z| = \rho =$ modulo di z

$\alpha =$ l'angolo che la semiretta per z forma con l'asse reale

$(\alpha \in [0, 2\pi[\,)$

$=$ argomento principale di z

$\boxed{z = \rho\cos\alpha + i\rho\operatorname{sen}\alpha = \boxed{\rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}}$

rappresentazione trigonometrica di z

moltiplicazione $\quad z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1) = \rho_1\cos\alpha_1 + i\rho_1\operatorname{sen}\alpha_1$

$z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2) = \rho_2\cos\alpha_2 + i\rho_2\operatorname{sen}\alpha_2$

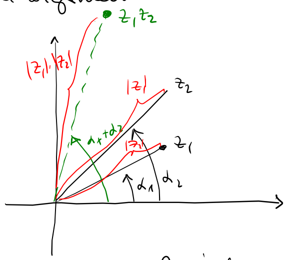
$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \rho_1\rho_2\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 + i(\rho_1\rho_2\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 + \rho_1\rho_2\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2)$

$= \rho_1\rho_2\left((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2) + i(\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2)\right)$

$= \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2))$

quindi nel prodotto

- i moduli si moltiplicano
- gli argomenti si sommano



oss. la formula vale indipendentemente dal fatto che anche se $\alpha_1 \in [0, 2\pi[$, $\alpha_2 \in [0, 2\pi[$
$\alpha_1 + \alpha_2$ sia $> 2\pi$

conviene introdurre un insieme $\{\alpha + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
per $\alpha \in [0, 2\pi[$

chiamo argomento l'insieme $\{\alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, \alpha+6\pi \dots\}$
$\alpha - 2\pi, \alpha - 4\pi, \dots$
$[\alpha]$

associo a ogni numero complesso diverso da 0
la coppia $(\rho, [\alpha])$

modulo

l'argomento principale e tutti gli angoli ottenuti come α + multiplo di 2π

Applicazione FORMULA DI DE MOIVRE

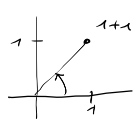
se $z = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

allora $\boxed{z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))}$

Esempio calcolare $(1+i)^{17}$

scrivo $1+i$ in forma trigonometrica

modulo $= \rho = \sqrt{2}$
argomento (principale) $= \frac{\pi}{4}$



$$z^{17} = \rho^{17}\left(\cos\left(17\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(17\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$17\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{17}{4}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$= (\sqrt{2})^{17}\cdot\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{2}^{17} = 2^8\cdot\sqrt{2}$$

$$= 256\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 256(1+i)$$

$$= 256 + i\,256$$

Esercizi

1) rappresentare sul piano di Gauss
i $1+i$, $-i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-1-i$

2) dei precedenti calcolare
complesso coniugato
modulo
reciproco

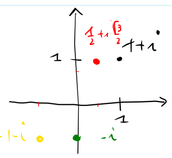
3) scrivere la rapp. trigonometrica di $\dfrac{1+i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Esercizi

1) rappresentare nel piano di Gauss
i $1+i$, $-i$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-1-i$

2) dei precedenti calcolare complesso coniugato
modulo
reciproco

3) scrivere la rapp. trigonometrica di $\dfrac{1+i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$



$\overline{1+i} = 1-i$ $\quad |1+i| = \sqrt{2}$

$\overline{-i} = i$ $\quad |-i| = 1$

$$(a+ib)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) \qquad (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = (1-i)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

modulo

argomento (argomento principale $+2k\pi$)

$$1+i = \left[\sqrt{2}, \left[\tfrac{\pi}{4}\right]\right]$$

$$-i = \left[1, \left[\tfrac{3}{2}\pi\right]\right]$$

$$-1 = \left[1, [\pi]\right]$$

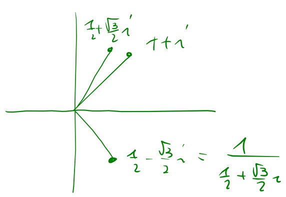
rapp. trig. di $\dfrac{1+i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\qquad 1+i = \left[\sqrt{2}, \left[\tfrac{\pi}{4}\right]\right]$

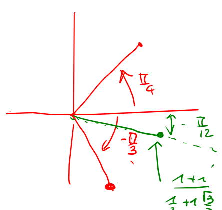
$\qquad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, \left[\tfrac{\pi}{3}\right]\right]$

regola del prodotto < moduli si molt. / angoli si sommano

regola del quoziente < moduli si dividono / angoli si sottraggono

$$\frac{1+i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \left[\frac{\sqrt{2}}{1}, \left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right]\right] = \left[\sqrt{2}, \left[-\frac{\pi}{12}\right]\right] = \left[\sqrt{2}, \left[\frac{11}{12}\pi\right]\right]$$





- Equazioni polinomiali in $\mathbb{C}$

oss. in $\mathbb{R}$ l'equazione $x^2 = a$
si può risolvere solo se $a \geq 0$
se $a < 0$ non ci sono soluzioni

vediamo cosa succede in $\mathbb{C}$

$z^2 = w$ con $z = x+iy$, $w = a+ib$

e $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$(x+iy)^2 = a+ib$$

$$\boxed{x^2-y^2+2ixy = a+ib} \qquad \boxed{(x^2-y^2, 2xy) = (a,b)}$$

$$\boxed{\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}}$$

$(x+iy)^2 = a+ib$

$\boxed{x^2-y^2+2ixy = a+ib}$ $\quad$ $\boxed{(x^2-y^2,\ 2xy) = (a,b)}$

$$\boxed{\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}}$$

$2xy = b$

supponiamo $b = 0$ $\quad$ $\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ xy = 0 \end{cases}$

se $a \geq 0$ ho le soluzione $\begin{cases} x^2 = a \\ y = 0 \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{a}$ $\quad$ $\boxed{z = \pm\sqrt{a}}$ 2 sol

se $a < 0$ ho le soluzioni $\begin{cases} -y^2 = a \\ x = 0 \end{cases}$

$y = \pm\sqrt{-a}$ $\quad$ $\boxed{z = \pm i\sqrt{-a}}$ 2 sol

$b \neq 0$

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ y = \frac{b}{2x} \end{cases}$$

$x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a$

$\frac{4x^4-b^2}{4x^2} = a$

$$\boxed{4x^4 - 4x^2a - b^2 = 0}$$

$t = x^2$

$4t^2 - 4ta - b^2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{+2a \mp \sqrt{4a^2+4a^2}}{4} = \frac{a \mp \sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$x^2 = t_1 = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0$ $\quad$ non è accettabile

$x^2 = t_2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ $\quad$ $y = \pm\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$

conclusione

ho 2 soluzioni

$z_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}$

$z_2 = -z_1$

$\boxed{z^2 = w}$ ha sempre soluzione in $\mathbb{C}$

le soluzioni sono 2 distinte se $w \neq 0$

altrimenti ho la soluzione $z = 0$

oss. questo è un caso particolare di una equazione del tipo

$$w_n z^n + w_{n-1}z^{n-1} + \dots + w_1 z + w_0 = 0$$

polinomio di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$ $\quad$ $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$

oss. questo è un caso particolare di una equazione del tipo

$$w_n z^n + w_{n-1} z^{n-1} + \dots + w_1 z + w_0 = 0$$

polinomio di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$ $\qquad w_0, w_1, w_2, \dots w_n \in \mathbb{C}$

un polinomio di grado n a coeff in $\mathbb{C}$ ha sempre n radici in $\mathbb{C}$

(Teorema fondamentale dell'algebra)

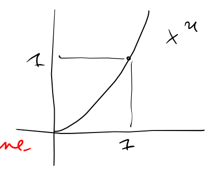
vale anche la versione per polinomi a coeff. reali (Gauss 1799)

- radici dell'unità in $\mathbb{C}$

voglio risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^n = 1$$

posso risolverla utilizzando la rappresentazione trigonometrica



$$z = [\rho, [\alpha]]$$

$$z^n = [\rho^n, [n\alpha]] = [1, [0]] = 1$$

$$\rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$[n\alpha] = [0]$$

n angoli diversi

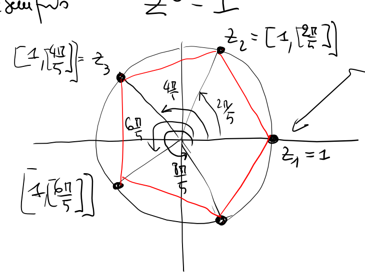
$$\begin{cases} n\alpha = 0 & \alpha = 0 \\ n\alpha = 2\pi & \alpha = \frac{2\pi}{n} \\ n\alpha = 4\pi & \alpha = \frac{4\pi}{n} \\ n\alpha = 6\pi & \alpha = \frac{6\pi}{n} \\ \vdots & \\ n\alpha = 2(n-1)\pi & \alpha = \frac{2(n-1)\pi}{n} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi \end{cases}$$

da qui continuano a ripetersi

$$n\alpha = 2n\pi \qquad \alpha = \frac{2\pi \cancel{n}}{\cancel{n}} = 2\pi$$

conclusione: le soluzioni sono n punti della circonferenza unitaria

Esempio $\quad z^5 = 1$



$z_2 = [1, [\frac{2\pi}{5}]]$

$z_3 = [1, [\frac{4\pi}{5}]]$

$z_4 = [1, [\frac{6\pi}{5}]]$

$z_5 = [1, [\frac{8\pi}{5}]]$

$z_6 = [1, [\frac{10\pi}{5}]] = [1, [2\pi]] = [1, [0]]$

risolvere $\quad z^4 = -2$

$z = [\rho, [\alpha]] \qquad z^4 = [\rho^4, [4\alpha]]$

$-2 = [2, [\pi]]$

risolvere $\boxed{z^4 = -2}$

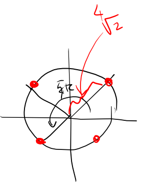
$z = [\rho, [\alpha]]$ $\qquad z^4 = [\rho^4, [4\alpha]]$

$-2 = [2, [\pi]]$

$$[\rho^4, [4\alpha]] = [2, [\pi]]$$

$\rho^4 = 2 \qquad \rho = \sqrt[4]{2}$

$[4\alpha] = [\pi]$



$4\alpha = \pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$

$4\alpha = \pi + 2\pi \qquad \alpha = \frac{3}{4}\pi$

$4\alpha = \pi + 4\pi \qquad \alpha = \frac{5}{4}\pi$

$4\alpha = \pi + 6\pi \qquad \alpha = \frac{7}{4}\pi$

$4\alpha = \pi + 8\pi \qquad \alpha = \frac{9}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi$

$z_1 = [\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{4}]$, $\quad z_2 = [\sqrt[4]{2}, \frac{3}{4}\pi]$,

$z_3 = [\sqrt[4]{2}, \frac{5}{4}\pi]$, $\quad z_4 = [\sqrt[4]{2}, \frac{7}{4}\pi]$

$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \sin\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ES. risolvere $z^5 = -i$

ES. risolvere $z^2 + 3iz + 4 = 0$

idea completare il quadrato

prima abbiamo risolto $z^2 = w \in \mathbb{C}$

$\left(z^2 + 3iz + \left(\frac{3i}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3i}{2}\right)^2 + 4 = 0$

$\left(z + \frac{3}{2}i\right)^2 - \left(\frac{3i}{2}\right)^2 + 4 = 0 \qquad \left(\frac{3}{2}i\right)^2 = -\frac{9}{4}$

$\left(z + \frac{3}{2}i\right)^2 + \frac{9}{4} + 4 = 0 \qquad \frac{9+16}{4}$

$\left(z + \frac{3}{2}i\right)^2 = -\frac{25}{4}$

$\left(z + \frac{3}{2}i\right) = w \qquad$ risolvo $\quad w^2 = -\frac{25}{4}$

$w = \pm i\frac{5}{2}$

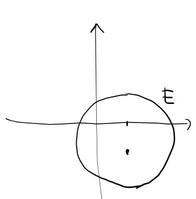
$\left(z + \frac{3}{2}i\right) = \pm i\frac{5}{2}$

$z_1 = -\frac{3}{2}i + \frac{5}{2}i = i$

$z_2 = -\frac{3}{2}i - \frac{5}{2}i = -4i$

ES. disegnare nel piano di Gauss

$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = 2\}$



$z = x + iy$

$|x + iy - 1 + i| = 2$

$|(x-1) + i(y+1)| = 2$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2\}$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$