RAPPRESENTAZIONI

I gruppi e le algebre di Lie possono essere definiti in maniera astratta, dando un insieme e una regola per moltiplicare i suoi elementi.

Dato un gruppo G, posso "rappresentare" ogni suo elemento con una matrice quadrata, in modo che il prodotto di G diventa il prodotto di matrici. Più formalmente

Def. Una RAPPRESENTAZIONE R di un GRUPPO è un OMOMORFISMO di gruppo

$$\hat{\rho}_R : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_R)$$

cioè è una mappa da G agli endomorfismi che agiscono su uno sp. vett. V_R di dim d_R, t.c.

$$\forall g_1, g_2 \in G \qquad \hat{\rho}_R(g_1) \cdot \hat{\rho}_R(g_2) = \hat{\rho}_R(g_1 g_2)$$

d_R è detta dimensione della rappresentazione.

Analogamente per un'algebra di Lie, essa può essere rappresentata da matrici; ci basta capire quali sono le matrici quadrate t^a_R che rappresentano i generatori T^a.
Affinché sia una buona rappresentazione, t^a_R si devono "comportare come" i T^a, cioè

$$\underbrace{[t^a_R, t^b_R]}_{\text{commutatore di matrici}} = i \underbrace{f^{ab}{}_c}_{\text{cost. di strutt.}} t^c_R$$

d_R è la taglia della matrice

Def. Una RAPPRESENTAZIONE R di un'alg. di Lie $\mathcal{G}$ è data da spazio vettoriale V_R e un homomorphism (lineare)

$$\rho_R : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(V_R)$$

t.c. $\forall a, b \in \mathcal{G}$

$$\rho_R(\underbrace{[a,b]}_{\text{Lie product}}) = \underbrace{[\rho_R(a), \rho_R(b)]}_{\text{commutatore di matrici}} \equiv \rho_R(a)\cdot\rho_R(b) - \rho_R(b)\rho_R(a)$$

$d_R = \dim V_R$ è la dimensione della rappresentazione.

Quindi $\rho_R([T^a, T^b]) = [t^a_R, t^b_R]$ $\qquad t^a_R = \rho_R(T^a)$

$$\rho_R([T^a, T^b]) = i f^{ab}{}_c\, \rho_R(T^c) = i f^{ab}{}_c\, t^c_R$$

- Due rep. R_1 e R_2 sono EQUIVALENTI se $\exists S$ invertibile t.c. $\forall a \in \mathcal{G}$ $\qquad \rho_2(a) = S \rho_1(a) S^{-1}$.

- La mappa ρ_{R*} data da $\rho_{R*}(a) = -\rho_R(a)^T$ definisce una rap. chiamata RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

Dim. $[t^a_{R*}, t^b_{R*}] = [t^{aT}_R, t^{bT}_R] = -[t^a_R, t^b_R]^T = i f^{ab}{}_c (-t^c)^T$ //

- Una rap. R si dice RAPPRESENTAZIONE RIDUCIBILE se $\exists$ un sottospazio proprio $V_R' \subset V_R$ che è invariante sotto l'azione di $\rho_R(a)$ $\forall a \in \mathfrak{g}$:

$$\rho_R(a) V_R' \subseteq V_R' \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

Se qto avviene, le matrici che rappresentano $\mathfrak{g}$ possono essere scritte (con opportuna scelta di base) nella forma DIAGONALE A BLOCCHI, dove ogni blocco agisce su un sottosp. invariante.

- Una RAPPRESENTAZIONE IRRIDUCIBILE è una rap. per cui V_R non ha sottosp. invarianti. (irrep)

Rep e Irrep possono essere definite in modo analogo per i gruppi.

Rappresentazione TRIVIALE

Se prendo $\rho_R(a) = 0$ $\forall a \in \mathfrak{g}$ $\rightarrow$ $0 = \rho_R([a,b]) = [\rho_R(a), \rho_R(b)] = 0$ ✓

cioè ho una rap. 1-dim. detta triviale. In particolare $t^a_R = 0$ $\forall a = 1, \dots, d$

Rappresentazione AGGIUNTA

Una rappresentaz. di $\mathcal{G}$ è data dalla scelta di uno SP. VETTORIALE e da un'azione lineare su di esso associata ad ogni elem. dell'algebra.

$\mathcal{G}$ è uno sp. vett. e dato $a \in \mathcal{G}$, esiste un'az. lineare di a su $\mathcal{G}$ data dall'operatore lin. $ad(a)$:

$$ad(a) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$
$$b \longmapsto ad(a) \cdot b = [a,b]$$

La rep. con $V = \mathcal{G}$ e $\rho_{Ad}(a) = ad(a)$ è chiamata **RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA**.

La rep. aggiunta esiste $\forall \mathcal{G}$.

Elem. di matrice $(t^a_{Ad})_{cb} = ad(T^a)_{cb}$:

$$ad(T^a) \cdot T^b = [T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c \, T^c$$

$Ae_i = \sum_k A^k{}_i e_k$

$A \sum_i v^i e_i = \sum_{i,k} A^k{}_i v^i e_k$

$$\Rightarrow \quad (t^a_{Ad})_c{}^b = i f^{ab}{}_c$$

Verifichiamo che la mappa $ad(\cdot)$ preserva il prodotto di Lie

$$[ad(a), ad(b)]c = ad(a) ad(b) c - ad(b) ad(a) c =$$
$$= [a,[b,c]] - [b,[a,c]] = -[[b,c],a] - [[c,a],b] \overset{\text{Jacobi identity}}{=}$$
$$= [[a,b],c] = ad([a,b])c \qquad \forall c \quad //$$

PRODOTTO TENSORE di rep.

Supponiamo di avere due rep. R_1 e R_2.

Lo spazio vett.

$$V_{R_1} \otimes V_{R_2}$$

supporta una rep., che chiamiamo $R_1 \otimes R_2$, i cui generatori sono rappres. dalle matrici

$$\rho_{R_1 \otimes R_2}(T^a) = \rho_{R_1}(T^a) \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \rho_{R_2}(T^a)$$

Infatti qte matrici soddisfano le regole di comm:

$$\left[\rho_{R_1 \otimes R_2}(T^a), \rho_{R_1 \otimes R_2}(T^b)\right] = \rho_{R_1}(T^a)\rho_{R_1}(T^b) \otimes \mathbb{1}_{R_2} +$$

$$+ \mathbb{1}_{R_1} \otimes \rho_{R_2}(T^a)\rho_{R_2}(T^b) + \rho_{R_1}(T^a) \otimes \rho_{R_2}(T^b) + \rho_{R_1}(T^b) \otimes \rho_{R_2}(T^a)$$

$$- (a \leftrightarrow b) =$$

$$= \left[\rho_{R_1}(T^a), \rho_{R_1}(T^b)\right] \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \left[\rho_{R_2}(T^a), \rho_{R_2}(T^b)\right]$$

$$= i f^{ab}{}_c \left(\rho_{R_1}(T^c) \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \rho_{R_2}(T^c) \right)$$

$$= i f^{ab}{}_c \, \rho_{R_1 \otimes R_2}(T^c) \quad //$$

In generale, il prodotto tensore tra due irrep non è irriducibile:

$$V_{R_1} \otimes V_{R_2} = \bigoplus_i V_{R_i}$$

Vedremo più avanti come capire chi compare a destra.

Rep. di Gruppi vs Alg. di Lie

Siccome G e $\mathcal{G}$ sono legate dalla mappa exp

$$g = \exp(a) \qquad (\text{almeno in un intorno di } \mathbb{1})$$

dato una rep. di $\mathcal{G}$, ottengo sempre una rep. di G e viceversa.

Mostriamo che data rep ρ_R di $\mathcal{G}$,

$\hat{\rho}_R(g) \equiv \exp(\rho_R(a))$ è buona rep. di G:

Formula di CAMPBELL-HAUSDORF

$$\hat{\rho}_R(g_1)\,\hat{\rho}_R(g_2) = e^{\rho_R(a_1)}\,e^{\rho_R(a_2)} =$$

$$= e^{\rho_R(a_1) + \rho_R(a_2) + [\rho_R(a_1), \rho_R(a_2)] + \dots} =$$

$$= \exp(\rho_R(a_1 + a_2 + [a_1, a_2] + \dots))$$

$$= \hat{\rho}_R(\underbrace{\exp(a_1 + a_2 + [a_1, a_2]}_{= g_1 g_2} + \dots))$$

Per questo motivo studieremo le rep. delle algebre di Lie. Per esponenziazione si ottengono poi le rep. dei gruppi di Lie associati.

(Per gruppi compatti, exp è suriettiva.)