

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana

Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi



Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 4

McGraw-Hill

Indice

1	Introduzione e concetti di base	1
	Introduzione, classificazione e sistema	1
	Massa, forza e unità di misura	4
	Modellazione e risoluzione di problemi ingegneristici	7
	Riepilogo	9
2	Proprietà dei fluidi	11
	Densità	12
	Tensione di vapore e cavitazione	15
	Energia specifica	16
	Comprimibilità e velocità del suono	17
	Viscosità	24
	Tensione superficiale e capillarità	30
	Riepilogo	32
3	Statica dei fluidi	37
	Pressione, manometro e barometro	38
	Spinte idrostatiche su superfici piane e curve	59
	Galleggiamento	66
	Moto rigido dei fluidi	72
	Riepilogo	81
4	Cinematica dei fluidi	99
	Problemi introduttivi	99
	Descrizioni lagrangiana ed euleriana	101
	Strutture del moto e visualizzazione del moto	107
	Moto e deformazione di elementi di fluido	115
	Teorema del trasporto di Reynolds	126
	Riepilogo	127
5	Equazioni della massa, di Bernoulli, dell'energia	135
	Conservazione della massa	136
	Energia meccanica e rendimento	140
	Teorema di Bernoulli	145
	Equazione dell'energia	160
	Riepilogo	174

6	Equazione della quantità di moto	183
	Leggi di Newton e conservazione della quantità di moto	184
	Equazione della quantità di moto	184
	Riepilogo	218
7	Analisi dimensionale e modellazione	229
	Dimensioni e unità, dimensioni fondamentali	229
	Omogeneità dimensionale	232
	Adimensionalizzazione delle equazioni	233
	Analisi dimensionale e similitudine	234
	Parametri adimensionali e metodo delle variabili ripetute	238
	Prove sperimentali e similitudine incompleta	255
	Riepilogo	260
8	Correnti in pressione	275
	Moto laminare e moto turbolento	276
	Moto completamente sviluppato	279
	Perdite localizzate	298
	Reti di distribuzione	299
	Lunghe condotte	326
	Misura della velocità e della portata	336
	Riepilogo	343
9	Equazioni indefinite del moto dei fluidi	357
	Problemi di base	357
	Equazione di continuità	359
	Funzione di corrente	361
	Equazione della quantità di moto e condizioni al contorno	371
	Riepilogo	379
10	Soluzioni approssimate dell'equazione di Navier-Stokes	391
	Problemi di base	392
	Moto non viscoso	395
	Moto irrotazionale	396
	Strati limite	400
	Riepilogo	409
11	Moto attorno ai corpi: resistenza e portanza	411
	Resistenza e portanza	412
	Moto su lastra piana	424
	Moto attorno a cilindri e sfere	428
	Portanza	432
	Riepilogo	436
12	Moto dei fluidi comprimibili	441
	Grandezze di ristagno	442
	Moto isoentropico unidimensionale	445
	Moto isoentropico negli ugelli	448
	Onde d'urto e onde di espansione	452

Moto con scambio di calore e resistenze trascurabili (Flusso di Rayleigh)	460
Moto adiabatico con resistenze non trascurabili (Flusso di Fanno)	467
Riepilogo	476
13 Correnti a superficie libera	495
Numero di Froude e celerità	497
Energia specifica ed equazione dell'energia	502
Moto uniforme e sezioni di minimo costo	509
Moto gradualmente e rapidamente variato. Risalto idraulico	520
Regolazione e misura della portata	527
Riepilogo	534

SOMMARIO

La *cinematica dei fluidi* si occupa della descrizione del moto senza analizzare le forze che lo causano. Ci sono due modi fondamentali di descrivere il moto: la descrizione *lagrangiana* e quella *euleriana*. Con l'approccio lagrangiano, si seguono particelle individuali o gruppi di particelle di fluido, mentre con l'approccio euleriano viene preso in esame un *volume di controllo* attraversato dal fluido.

Le equazioni del moto scritte nella forma valida per l'approccio lagrangiano possono essere trasformate nella forma valida per l'approccio euleriano mediante la *derivata totale*, nel caso di equazioni valide per elementi infinitesimi di fluido, o il *teorema del trasporto di Reynolds*, nel caso di equazioni valide per volumi finiti di fluido. Per qualunque grandezza estensiva B di una massa fluida m o per la corrispondente grandezza intensiva $b = B/m$, si ha

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)b \quad (4.13)$$

$$\frac{dB_S}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho b dW + \int_A \rho b (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dA \quad (4.45)$$

In entrambe le equazioni, la variazione temporale di una certa grandezza di una particella di fluido o di un sistema consiste di due parti: una parte *locale* e una *convettiva*.

Vi sono diversi modi di visualizzare e analizzare i campi di moto: *linee di flusso*, *linee di emissione*, *traiettorie*, *linee di tempo*, *profili*, *mappe di campi vettoriali* e *isolinee*. Nel caso più generale di un moto vario, *linee di flusso*, *linee di emissione* e *traiettorie* differiscono le une dalle altre, ma in *moto permanente* coincidono.

Per descrivere in maniera completa la cinematica di un campo di moto fluido sono necessarie quattro grandezze fondamentali: *velocità di traslazione*, *velocità angolare*, *velocità di deformazione lineare* e *velocità di deformazione angolare*.

La *vorticità* $\boldsymbol{\Omega}$ è una proprietà del moto che rappresenta la *rotazionalità* delle particelle di fluido:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{v}) \quad (4.29)$$

Una regione di un campo di moto è *irrotazionale* se la vorticità in quella regione è nulla. L'ipotesi di irrotazionalità permette di ridurre considerevolmente il grado di complessità della risoluzione di un campo di moto.

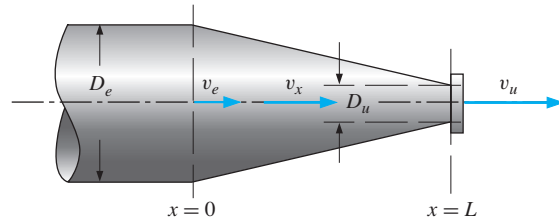
PROBLEMI

Problemi introduttivi

4.1 Cosa significa il termine *cinematica*? Di cosa si occupa la *cinematica dei fluidi*?

Analisi Il termine *cinematica* significa *movimento* e, per estensione, *studio del movimento*. La *cinematica dei fluidi* è lo studio del moto dei fluidi e di come tale moto può essere descritto. La cinematica descrive il moto dei fluidi senza prendere in considerazione le forze che ne sono la causa.

4.2 Nell'ugello in figura, per x che va da zero a L , la velocità del fluido in corrispondenza dell'asse aumenta con legge parabolica da v_e a v_u . Scrivere l'espressione della velocità.



Ipotesi 1 Il moto è permanente. **2** Il moto è a simmetria assiale. **3** Il fluido è incompressibile.

Analisi La legge parabolica in x può essere espressa come

$$v = a + bx^2$$

Per $x = 0$ deve essere $v = v_e$ per cui

$$a = v_e$$

mentre per $x = L$ deve essere $v = v_u$ per cui

$$v_u = v_e + bL^2$$

da cui

$$b = \frac{v_u - v_e}{L^2}$$

Quindi, l'espressione della velocità è

$$v = v_e + \frac{v_u - v_e}{L^2} x^2$$

4.3 Nel campo di velocità permanente bidimensionale

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 1,2x) \mathbf{i} + (-2,0 - 1,2y) \mathbf{j}$$

c'è un punto di ristagno? Dove?

Analisi In un punto di ristagno la velocità è identicamente nulla, cioè tutte le sue componenti devono essere uguali a zero. Per cui

$$v_x = 0,5 + 1,2x = 0$$

$$v_y = -2,0 - 1,2y = 0$$

equazioni soddisfatte, rispettivamente, per

$$x = -0,5/1,2 = -0,417$$

$$y = -2/1,2 = -1,67$$

Quindi, un punto di ristagno esiste ed ha coordinate $(-0,417; -1,67)$.

4.4 Nel campo di velocità permanente bidimensionale

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = [a^2 - (b - cx)^2]\mathbf{i} + (-2cby + 2c^2xy)\mathbf{j}$$

c'è un punto di ristagno? Dove?

Analisi In un punto di ristagno la velocità è identicamente nulla, cioè tutte le sue componenti devono essere uguali a zero. Per cui

$$v_x = a^2 - (b - cx)^2 = 0$$

$$v_y = -2cby + 2c^2xy = 0$$

equazioni soddisfatte, rispettivamente, per

$$x = \frac{b - a}{c}$$

$$y = 0$$

Quindi, un punto di ristagno esiste ed ha coordinate $[(b - a)/c; 0]$.

Discussione In alcuni campi di moto può esistere più di un punto di ristagno.

Descrizioni lagrangiana ed euleriana

4.5 Cos'è la descrizione lagrangiana del moto?

Analisi Con la *descrizione lagrangiana* del moto si segue il percorso di singole particelle di fluido (cioè di elementi composti da massa fissa e identificabile). Il metodo lagrangiano è quello che si usa nello studio del moto di corpi solidi.

4.6 Il metodo lagrangiano per l'analisi del moto di un fluido è più simile allo studio di un sistema o di un volume di controllo? Perché?

Analisi È più simile allo studio di un sistema. In entrambi i casi, infatti, si segue una massa di identità ben precisa mentre si muove nel campo di moto. Invece, nello studio di un volume di controllo, la massa entra ed esce dal volume e non viene studiata una ben precisa porzione di fluido, ma – istante per istante – il fluido che in quell'istante si trova all'interno del volume di controllo. Il metodo lagrangiano coincide con lo studio di un sistema quando il sistema, passando al limite e facendo tendere il suo volume a zero, degenera in un punto.

4.7 Cos'è la descrizione euleriana del moto? In cosa è diversa dalla descrizione lagrangiana?

Analisi Con la *descrizione euleriana* del moto si definiscono variabili di campo, come la velocità, la pressione e la temperatura, in funzione dello spazio e del tempo all'interno di un volume di controllo. Diversamente che con la descrizione lagrangiana, che prende in esame e segue nel suo movimento una ben precisa massa fluida, con la descrizione euleriana non si considera il moto di

alcuna particolare particella di fluido in particolare ma solo ciò che avviene nei successivi istanti in ogni punto del volume di controllo, attraversato da fluido in entrata e in uscita. Il fatto che le leggi fondamentali di conservazione siano valide per una massa ben precisa e non per un campo, porta a definire il metodo euleriano non altrettanto “naturale” del metodo lagrangiano.

4.8 Il metodo euleriano per l'analisi del moto di un fluido è più simile allo studio di un sistema o di un volume di controllo? Perché?

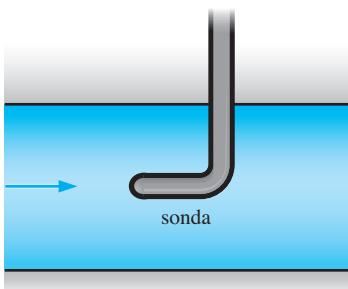
Analisi È più simile allo studio di un volume di controllo. In entrambi i casi, infatti, si ha ingresso e uscita di massa dal dominio del moto o dal volume di controllo e non viene studiata alcuna particolare porzione di fluido ma, istante per istante, il fluido che si trova all'interno del volume di controllo in quell'istante.

4.9 Definire un campo di moto permanente nel sistema di riferimento euleriano. In tale moto permanente, è possibile che una particella di fluido sia soggetta a una accelerazione non nulla?

Analisi Sì. Nel sistema di riferimento euleriano, un campo di moto è definito permanente quando **qualunque proprietà in qualunque punto si mantiene costante nel tempo**. In tale moto permanente, è possibile che una particella di fluido sia soggetta ad una accelerazione non nulla. Infatti, essendo, in generale, la velocità funzione sia del tempo che dello spazio, l'accelerazione, cioè la sua derivata totale rispetto al tempo, è somma della derivata parziale rispetto al tempo, detta *accelerazione locale*, dovuta alla variazione di velocità intervenuta nel punto nel generico intervallo di tempo, e della derivata spaziale, detta *accelerazione convettiva*, dovuta alla variazione di velocità della particella nel suo passaggio da un punto ad un altro. Se il moto è permanente è nulla l'accelerazione locale, ma non è necessariamente nulla l'accelerazione convettiva.

4.10 Elencare almeno altri tre modi per indicare la derivata totale e dare una breve spiegazione del perché ciascun nome sia appropriato.

Analisi La derivata totale viene chiamata anche **derivata sostanziale, materiale o euleriana**. Il termine “totale” è appropriato perché essa risulta composta da una aliquota locale (diversa da zero in moto vario) e da una aliquota convettiva. Il termine “materiale” si riferisce al fatto che si effettua tale derivata seguendo un punto materiale mentre si muove nel campo di moto. Il termine euleriana si riferisce al fatto che essa è usata nel passaggio dalla descrizione lagrangiana a quella euleriana del moto.



4.11 Una sonda rileva pressione e temperatura in funzione del tempo in un certo punto del campo di moto di un fluido. È una misura lagrangiana o euleriana? Perché?

Analisi Poiché la sonda è ferma nello spazio e il fluido si muove attorno ad essa, non vengono seguite le sorti di singole particelle di fluido ma vengono

misurati i valori di grandezze fisiche in un punto fisso nello spazio. Si tratta quindi di una misura **euleriana**.

4.12 Una piccola sonda elettronica di pressione, per la quale gli effetti di galleggiamento sono trascurabili, rilasciata nella tubazione di aspirazione di una pompa rileva 2000 misure al secondo mentre attraversa la pompa. È una misura lagrangiana o euleriana? Perché?

Analisi Poiché la sonda si muove solidalmente col fluido in equilibrio indifferente, essa segue una particella di fluido mentre attraversa la pompa. Si tratta quindi di una misura **lagrangiana**.

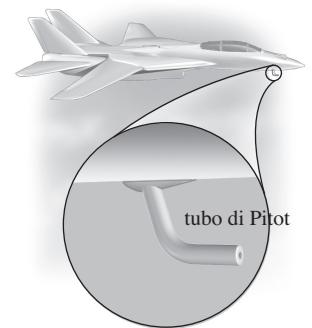
4.13 Un pallone meteorologico trasmette informazioni sulle condizioni del tempo alle stazioni di monitoraggio a terra quando raggiunge un'altitudine a cui corrisponde un galleggiamento indifferente. Le misure sono lagrangiane o euleriane? Perché?

Analisi Poiché il pallone meteorologico si muove solidalmente con l'aria ed è in equilibrio indifferente, esso segue specifiche particelle mentre si muove nell'atmosfera. Si tratta quindi di misure **lagrangiane**. In particolare, le porzioni di fluido sono piuttosto voluminose per cui le misure risultano grossolane e non possono fornire informazioni relative a fenomeni a piccola scala (come, ad esempio, le fluttuazioni turbolente nell'atmosfera).



4.14 Un tubo di Pitot posto nella parte inferiore di un aeroplano misura, quando l'aereo è in volo, la velocità relativa rispetto al vento. È una misura lagrangiana o euleriana? Perché?

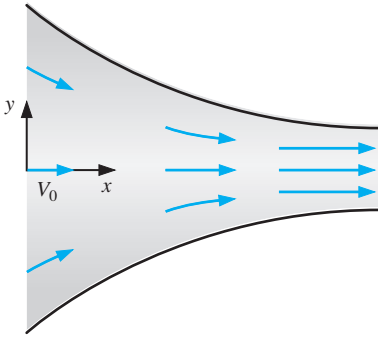
Analisi Rispetto all'aereo, il tubo di Pitot è fisso e l'aria si muove attorno ad esso. Quindi, *non* vengono seguite le vicende di singole particelle di fluido ma vengono misurati i valori di grandezze fisiche in un punto nello spazio, fisso rispetto all'aeroplano (che si muove, ma non col fluido). Si tratta quindi di una misura **euleriana**.



4.15 Un campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile attraverso un convergente può essere espresso in maniera semplice e approssimata come

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j}$$

dove V_0 è la velocità orizzontale per $x = 0$. Questa relazione, pur ignorando gli effetti viscosi in prossimità delle pareti, è un'approssimazione ragionevole per la maggior parte del campo di moto. Calcolare l'accelerazione totale delle particelle di fluido che attraversano il convergente.



Analisi In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = (V_0 + bx)b$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = b^2 y$$

e, in termini vettoriali,

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = b(V_0 + bx)\mathbf{i} + b^2 y\mathbf{j}$$

Discussione Per x e b positivi, le particelle di fluido accelerano nella direzione x positiva: nonostante il moto sia permanente, l'accelerazione è diversa da zero.

4.16 Il campo di pressione del campo di moto del problema precedente è espresso dalla relazione

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}[2V_0bx + b^2(x^2 + y^2)]$$

in cui p_0 è la pressione per $x = 0$. Scrivere la relazione che esprime la velocità di variazione della pressione di una particella di fluido.

Analisi Per definizione, la derivata totale della pressione ne fornisce il tasso temporale di variazione seguendo una particella di fluido. Usando il campo di velocità del problema precedente, si ha, pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} = \\ &= -\rho(V_0 + bx)(V_0b + b^2x) - \rho(-by)b^2y = \\ &= -\rho[V_0^2b + 2V_0b^2x - b^3(y^2 - x^2)] \end{aligned}$$

Discussione La regola di derivazione euleriana, qui applicata alla pressione, può essere applicata a qualunque proprietà del moto, scalare o vettoriale.

4.17 Un campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile ha componenti

$$v_x = 1,1 + 2,8x + 0,65y \quad v_y = 0,98 - 2,1x - 2,8y$$

Ricavare il campo di accelerazione e calcolare l'accelerazione nel punto $(x, y) = (-2, 3)$.

Analisi In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 2,8 (1,1 + 2,8x + 0,65y) + 0,65 (0,98 - 2,1x - 2,8y) = \\ &= 3,717 + 6,475x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= -2,1 (1,1 + 2,8x + 0,65y) - 2,8 (0,98 - 2,1x - 2,8y) = \\ &= -5,054 + 6,475y \end{aligned}$$

Nel punto di coordinate $(-2, 3)$ l'accelerazione ha, quindi, componenti $a_x = -9,23$ e $a_y = 14,4$.

Discussione Del campo di velocità assegnato non sono specificate le unità di misura. Si ipotizza che i coefficienti siano espressi in unità congruenti fra loro.

4.18 Un campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile ha componenti

$$v_x = 0,20 + 1,3x + 0,85y \quad v_y = -0,50 + 0,95x - 1,3y$$

Ricavare il campo di accelerazione e calcolare l'accelerazione nel punto $(x, y) = (1, 2)$.

Analisi In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 1,3 (0,20 + 1,3x + 0,85y) + 0,85 (-0,50 + 0,95x - 1,3y) = \\ &= -0,165 + 2,4975x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= 0,95 (0,20 + 1,3x + 0,85y) - 1,3 (-0,50 + 0,95x - 1,3y) = \\ &= 0,84 + 2,4975y \end{aligned}$$

Nel punto di coordinate $(1, 2)$ l'accelerazione ha, quindi, componenti $a_x = 2,33$ e $a_y = 5,84$.

Discussione Del campo di velocità assegnato non sono specificate le unità di misura. Si ipotizza che i coefficienti siano espressi in unità congruenti fra loro.

4.19 Con riferimento al campo di velocità del problema 4.2, scrivere l'espressione dell'accelerazione del fluido lungo l'asse.

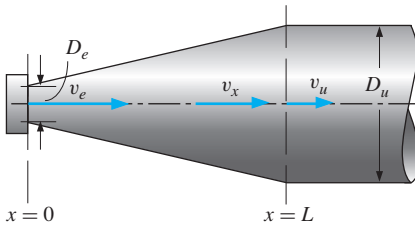
Analisi L'espressione della velocità lungo l'asse è

$$v = v_e + \frac{v_u - v_e}{L^2} x^2$$

Pertanto, in direzione x l'accelerazione ha componente

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 2 \frac{v_u - v_e}{L^2} x \left(v_e + \frac{v_u - v_e}{L^2} x^2 \right) = \\ &= 2v_e \frac{v_u - v_e}{L^2} x + 2 \frac{(v_u - v_e)^2}{L^4} x^3 \end{aligned}$$

Discussione Nonostante il moto sia permanente, la particelle in moto lungo l'asse dell'ugello accelerano.



4.20 Nel diffusore in figura, per x che va da zero a L , la velocità del fluido diminuisce con legge parabolica da v_e a v_u . Scrivere l'espressione della velocità.

Ipotesi 1 Il moto è permanente. **2** Il moto è assialsimmetrico.

Analisi La legge parabolica in x può essere espressa come

$$v = a + bx^2$$

Per $x = 0$ deve essere $v = v_e$, per cui

$$a = v_e$$

mentre, per $x = L$, deve essere $v = v_u$, per cui

$$v_u = v_e + bL^2$$

da cui

$$b = \frac{v_u - v_e}{L^2}$$

Quindi, l'espressione della velocità è

$$v = v_e + \frac{v_u - v_e}{L^2} x^2$$

4.21 Con riferimento al campo di velocità del problema precedente, scrivere l'espressione dell'accelerazione del fluido lungo l'asse e calcolarne il valore per $x = 0$ e per $x = 1,0$ m, essendo $L = 2,0$ m, $v_e = 30,0$ m/s e $v_u = 5,0$ m/s.

Analisi In direzione x l'accelerazione ha componente

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 2x \frac{v_u - v_e}{L^2} x \left(v_e + \frac{v_u - v_e}{L^2} x^2 \right) = \\ &= 2v_e \frac{v_u - v_e}{L^2} x + 2 \frac{(v_u - v_e)^2}{L^4} x^3 \end{aligned}$$

Pertanto, per $x = 0$, si ha $a_x = 0$ e, per $x = 1$ m,

$$\begin{aligned} a_x &= 2 \times 30,0 \times \frac{5,0 - 30,0}{2,0^2} \times 1,0 + 2 \times \frac{(5,0 - 30,0)^2}{2,0^4} \times 1,0^3 = \\ &= -297 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Discussione Nonostante il moto sia permanente, la particelle in moto lungo l'asse dell'ugello decelerano ($a_x < 0$). Essendo il campo di velocità parabolico, il valore assoluto dell'accelerazione, nullo all'ingresso, aumenta rapidamente verso valle.

Strutture del moto e visualizzazione del moto

4.22 Qual è la definizione di *linea di flusso*? Cosa rappresentano le linee di flusso?

Analisi Una **linea di flusso è una curva tangente in ogni punto al vettore velocità in quel punto**. Essa indica la direzione istantanea del moto in ogni suo punto.

4.23 Scrivere l'espressione delle linee di flusso del campo di velocità permanente bidimensionale del problema 4.15.

Analisi È assegnato il campo di velocità bidimensionale nel piano xy

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j}$$

Pertanto, per la 4.15, l'equazione differenziale delle linee di flusso è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-by}{V_0 + bx}$$

Separando le variabili, si ha

$$-\int \frac{1}{by} dy = \int \frac{1}{V_0 + bx} dx$$

e integrando

$$-\frac{1}{b} \ln(by) = \frac{1}{b} \ln(V_0 + bx) + \frac{1}{b} \ln C_2$$

avendo posto la costante di integrazione $C_1 = (1/b) \ln C_2$. Semplificando ed eliminando i logaritmi, si ottiene

$$by(V_0 + bx) = \frac{1}{C_2}$$

e, infine, ponendo $C = 1/(bC_2)$,

$$y = \frac{C}{V_0 + bx}$$

Discussione Ogni valore di C definisce una linea di flusso nel campo di moto.

4.24 Tracciare alcune linee di flusso, indicando anche il verso, del campo di velocità permanente bidimensionale del problema 4.15 per $0 \leq x \leq 1,5$ m e $-1,0 \leq y \leq 1,0$ m, essendo $V_0 = 1,5$ m/s e $b = 4,6$ s⁻¹.

Analisi È assegnato il campo di velocità bidimensionale nel piano xy

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j}$$

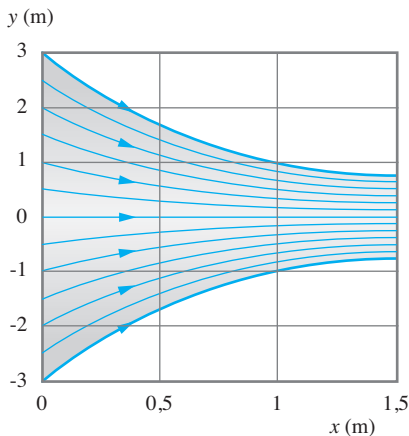
del quale, nel problema precedente, è stata ottenuta l'equazione delle linee di flusso

$$y = \frac{C}{V_0 + bx}$$

che, per i valori assegnati, diviene

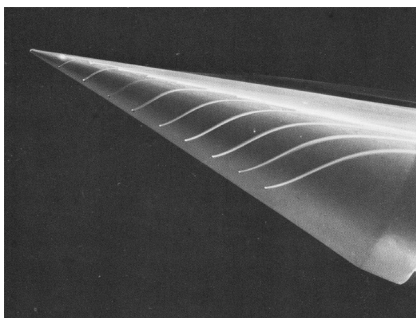
$$y = \frac{C}{1,5 + 4,6x}$$

Assegnando valori diversi alla costante C , si ottengono le linee di flusso tracciate in figura. Per individuare il verso del moto, si possono calcolare v_x e v_y in alcuni punti del campo di moto. Per esempio, per $x = 1$ m e $y = 0$ m, si ha $v_x = 6,1$ m/s e $v_y = 0$ m/s. In questo punto, dunque, il moto ha direzione orizzontale e verso da sinistra a destra.



4.25 Qual è la definizione di *traiettoria*? Cosa rappresentano le traiettorie?

Analisi Una **traiettoria** è il percorso realmente effettuato da una particella di fluido in un certo intervallo di tempo. Una traiettoria rappresenta l'esatta successione delle posizioni, da quella iniziale a quella finale, occupate nel tempo da ciascuna particella di fluido. A differenza delle linee di flusso, che si riferiscono ad un determinato istante, esse sono relative ad un intervallo di tempo finito.



4.26 La figura è relativa al moto di un fluido attorno a un cono avente angolo di apertura di 12°, inclinato di 16° rispetto alla direzione del moto, per un numero di Reynolds pari a 15 000. La visualizzazione è ottenuta iniettando un fluido colorato nell'acqua attraverso forellini praticati nel cono. Le linee visualizzate sono linee di flusso, linee di emissione, traiettorie o linee di tempo? Perché?

Analisi L'immagine mostra strisce di colorante, ciascuna delle quali rappresenta la successione delle posizioni occupate nel tempo da particelle di colorante iniettate nell'acqua attraverso forellini praticati sulla superficie del cono. Tali linee sono dunque **linee di fumo**. Se, come appare, il moto è permanente, tali linee di fumo coincidono con le traiettorie e con le linee di flusso.

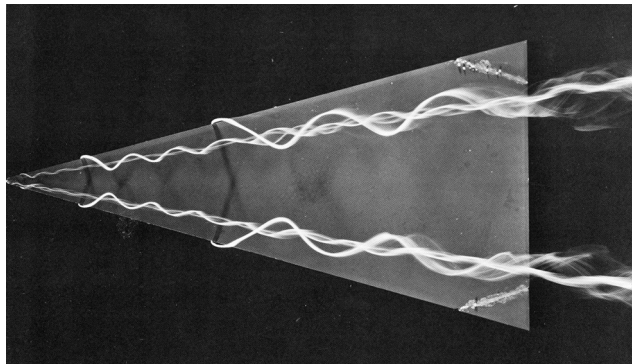
Discussione Si assume che il fluido colorato si muova solidalmente con l'acqua. Tale ipotesi è corretta se la densità del colorante è simile a quella dell'acqua.

4.27 Qual è la definizione di *linea di emissione*? Qual è la differenza tra linee di emissione e linee di flusso?

Analisi Una **linea di emissione o di fumo** è il luogo delle particelle di fluido che sono passate in sequenza in uno stesso punto del campo di moto. Le linee di emissione sono molto diverse dalle linee di flusso. Queste sono, infatti, linee relative ad un determinato istante, tangenti in ogni punto al vettore velocità in quel punto, mentre le linee di fumo riguardano un intervallo finito di tempo. In moto vario, le linee di fumo sono tortuose e mantengono tale forma contorta anche se il campo di moto varia, mentre le linee di flusso variano istante per istante col campo di moto.

Discussione Se il moto è permanente, linee di emissione e linee di flusso coincidono.

4.28 La figura è relativa al moto attorno a un'ala a delta con apertura di 15° , per un angolo di incidenza di 20° e numero di Reynolds pari a 20 000. La visualizzazione è ottenuta iniettando un fluido colorato nell'acqua attraverso forellini praticati nell'intradosso dell'ala. Le linee visualizzate sono linee di flusso, linee di emissione, traiettorie o linee di tempo? Perché?



Analisi L'immagine mostra strisce di colorante, ciascuna delle quali rappresenta la successione delle posizioni occupate nel tempo da particelle di colorante iniettate nell'acqua attraverso forellini praticati sulla superficie dell'ala. Tali linee sono dunque **linee di fumo**. Il moto non appare permanente, quindi tali linee di fumo *non* coincidono con le traiettorie o con le linee di flusso.

Discussione Si assume che il fluido colorato si muova solidalmente con l'acqua. Tale ipotesi è corretta se la densità del colorante è simile a quella dell'acqua.

4.29 Qual è la definizione di *linea di tempo*? Come si possono generare linee di tempo in una corrente idrica? In quale caso le linee di tempo sono più utili delle linee di emissione?

Analisi Una linea di tempo è il luogo delle posizioni raggiunte in un certo istante dall'insieme di particelle di fluido che in un istante precedente stavano su una linea. In una corrente idrica, linee di tempo possono essere facilmente generate usando un filo a bolle d'idrogeno. Esistono anche altre tecniche basate su una reazione chimica, innescata da una corrente elettrica che attraversa il filo, che fa cambiare colore al fluido sul filo stesso. Le linee di tempo sono più utili delle linee di emissione quando si vuole controllare l'uniformità del moto oppure quando si desidera visualizzare il profilo di velocità, ad esempio all'interno di uno strato limite. Anche in un moto permanente, le linee di tempo sono diverse dalle linee di flusso, dalle linee di fumo e dalle traiettorie.

4.30 Scrivere l'espressione delle linee di flusso del campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incompressibile

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 1,2x)\mathbf{i} + (-2,0 - 1,2y)\mathbf{j}$$

e tracciarne alcune per $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 6$.

Analisi Per la 4.15, l'equazione differenziale delle linee di flusso è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-2,0 - 1,2y}{0,5 + 1,2x}$$

Separando le variabili, si ha

$$-\int \frac{1}{-2,0 - 1,2y} dy = \int \frac{1}{0,5 + 1,2x} dx$$

e integrando

$$-\frac{1}{1,2} \ln(-2,0 - 1,2y) = \frac{1}{1,2} \ln(0,5 + 1,2x) + \frac{1}{1,2} \ln C_2$$

avendo posto la costante di integrazione $C_1 = (1/1,2) \ln C_2$. Semplificando ed eliminando i logaritmi, si ottiene

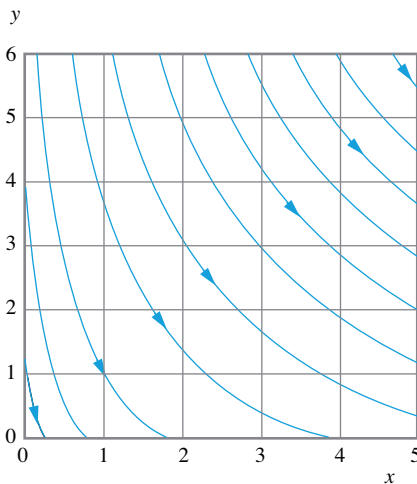
$$(-2,0 - 1,2y)(0,5 + 1,2x) = \frac{1}{C_2}$$

da cui, ponendo $C = -1/(1,2 C_2)$,

$$y = \frac{C}{0,5 + 1,2x} - 1,667$$

Assegnando valori diversi alla costante C , si ottengono le linee di flusso tracciate in figura. Per individuare il verso del moto, si possono calcolare v_x e v_y in alcuni punti del campo di moto. Per esempio, per $x = 3$ e $y = 3$, si ha $v_x = 4,1$ e $v_y = -5,6$. In questo punto, dunque, il moto è diretto dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra.

Discussione Nel primo quadrante, il moto risulta di rotazione antioraria.

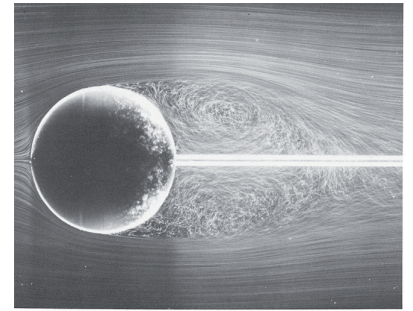


4.31 La figura si riferisce al moto attorno a una sfera per un numero di Reynolds di 15 000. La visualizzazione è generata mediante fotografia a lungo

tempo di esposizione di bolle d'aria in acqua. Le linee visualizzate sono linee di flusso, linee di emissione, traiettorie o linee di tempo? Perché?

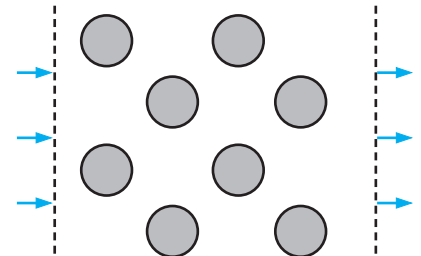
Analisi L'immagine è una fotografia a lungo tempo di esposizione di bolle d'aria in acqua. Quindi, ciascuna linea rappresenta il percorso di ciascuna bollicina di aria nel tempo. Tali linee sono dunque **traiettorie**. Osservando il moto lontano dalla sfera, esso appare permanente. Se così è, tali traiettorie coincidono con le linee di fumo e con le linee di flusso.

Discussione Si assume che le bollicine d'aria si muovano solidalmente con l'acqua. Se esse sono molto piccole, tale ipotesi è accettabile.



4.32 Con riferimento alla sezione trasversale di un fascio tubiero di uno scambiatore di calore, schematizzata in figura, indicare qual è la visualizzazione (mappa vettoriale o mappa di isolinee) più appropriata per rappresentare

- (a) il punto di massima velocità,
- (b) la separazione del moto a valle dei tubi,
- (c) il campo di temperature sul piano,
- (d) la distribuzione della componente di vorticità normale al piano.



Analisi (a) Per visualizzare il punto di massima velocità, essendo la grandezza di interesse il modulo della velocità e quindi una grandezza scalare, è più adatta una mappa di isolinee.

(b) Per visualizzare la separazione del moto a valle dei tubi, la rappresentazione più adatta è una mappa vettoriale della velocità che mostrerebbe dove il moto si separa. In alternativa, una mappa di isolinee della vorticità normale al piano mostrerebbe anch'essa la regione in cui si ha separazione.

(c) Per visualizzare il campo di temperature serve una mappa di isolinee di temperatura, essendo questa una grandezza scalare.

(d) Per visualizzare la distribuzione della componente di vorticità (grandezza scalare) normale al piano è necessaria la mappa di isolinee della vorticità normale a tale piano.

4.33 Tracciare la mappa vettoriale di velocità del campo del problema 4.30, per $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 6$.

Analisi È assegnato il campo di velocità

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 1,2x) \mathbf{i} + (-2,0 - 1,2y) \mathbf{j}$$

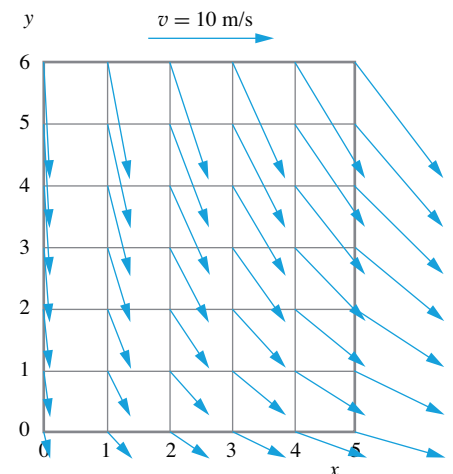
In qualunque punto del campo di moto, le componenti della velocità sono

$$v_x = 0,5 + 1,2x$$

$$v_y = -2,0 - 1,2y$$

Per ottenere la mappa vettoriale delle velocità, si scelgono alcuni punti e, per ciascuno di essi, di coordinate (x, y) , si calcolano le componenti della velocità e si traccia una freccia con l'estremo iniziale sul punto (x, y) e l'estremo finale sul punto $(x + sv_x, y + sv_y)$, essendo s un fattore di scala opportunamente scelto.

Discussione Nel primo quadrante, il moto risulta di rotazione antioraria.



4.34 Tracciare la mappa vettoriale di accelerazione del campo del problema 4.30, per $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 6$.

Analisi È assegnato il campo di velocità

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 1,2x)\mathbf{i} + (-2,0 - 1,2y)\mathbf{j}$$

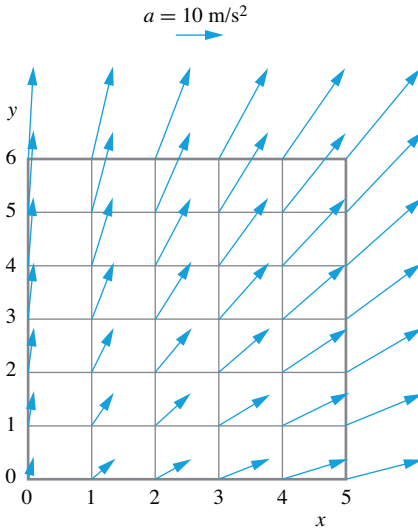
In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 1,2(0,5 + 1,2x) = 0,6 + 1,44x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= -1,2(-2,0 - 1,2y) = 2,4 + 1,44y \end{aligned}$$

Per ottenere la mappa vettoriale dell'accelerazione, si scelgono alcuni punti e, per ciascuno di essi, di coordinate (x, y) , si calcolano le componenti della accelerazione e si traccia una freccia con l'estremo iniziale sul punto (x, y) e l'estremo finale sul punto $(x + sa_x, y + sa_y)$, essendo s un fattore di scala opportunamente scelto.

Discussione Nel primo quadrante, poiché il moto è di rotazione antioraria, i vettori accelerazione sono diretti verso destra e verso l'alto (accelerazione centripeta).



4.35 Dato il campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incompressibile

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (1,0 + 2,5x + y)\mathbf{i} + (-0,5 - 1,5x - 2,5y)\mathbf{j}$$

- (a) determinare se ci sono punti di ristagno e dove sono
(b) tracciare alcuni vettori velocità per $0 \leq x \leq 4$ m e $0 \leq y \leq 4$ m.

Analisi (a) In un punto di ristagno la velocità è identicamente nulla, cioè tutte le sue componenti devono essere uguali a zero. Per cui

$$v_x = 1,0 + 2,5x + y = 0$$

$$v_y = -0,5 - 1,5x - 2,5y = 0$$

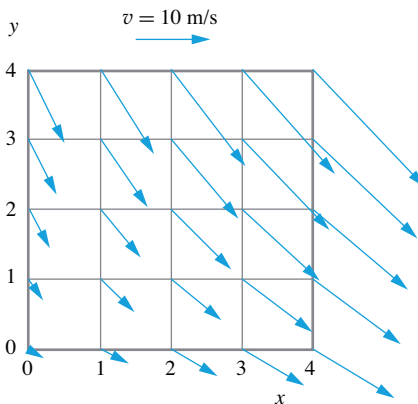
sistema di due equazioni in x e y , soddisfatto per

$$x = -0,421 \text{ m}$$

$$y = 0,0526 \text{ m}$$

Quindi, un punto di ristagno esiste ed ha coordinate $x = -0,421$ m e $y = 0,0526$ m.

(b) Dall'espressione del campo di velocità, è possibile calcolare le componenti della velocità secondo x e y in diversi punti del campo di moto. Dal campo di velocità così ottenuto e mostrato in figura, si può concludere che il moto è di rotazione antioraria, con velocità crescente da sinistra verso destra e dal basso



verso l'alto. Il punto di ristagno non giace all'interno del primo quadrante e quindi non è visibile in figura.

4.36 Per il campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile del problema 4.35

(a) calcolare l'accelerazione totale nel punto $x = 2$ m, $y = 3$ m.

(b) tracciare alcuni vettori accelerazione per $0 \leq x \leq 4$ m e $0 \leq y \leq 4$ m.

Analisi Il campo di velocità del problema 4.35 è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (1,0 + 2,5x + y)\mathbf{i} + (-0,5 - 1,5x - 2,5y)\mathbf{j}$$

(a) In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= 2,5(1,0 + 2,5x + y) + (-0,5 - 1,5x - 2,5y) = \\ &= 2,0 + 4,75x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= -1,5(1,0 + 2,5x + y) - 2,5(-0,5 - 1,5x - 2,5y) = \\ &= -0,25 + 4,75y \end{aligned}$$

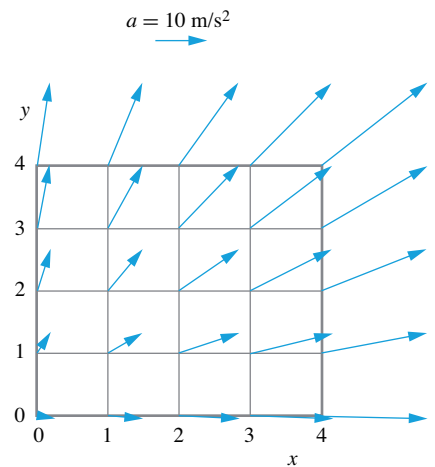
Pertanto, per $x = 2$ m e per $y = 3$ m, l'accelerazione ha componenti

$$a_x = 11,5 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$a_y = 14,0 \text{ m}^2/\text{s}$$

(b) Calcolando le componenti dell'accelerazione in diversi punti, si ottiene il campo mostrato in figura.

Discussione I vettori accelerazione sono diretti verso l'alto e verso destra, in accordo con quanto osservato nel problema precedente a proposito del campo di velocità. Essi rappresentano un campo di accelerazioni centripete dirette verso l'alto e verso destra. Si noti come, nonostante il moto sia permanente, il campo di accelerazione sia non nullo.



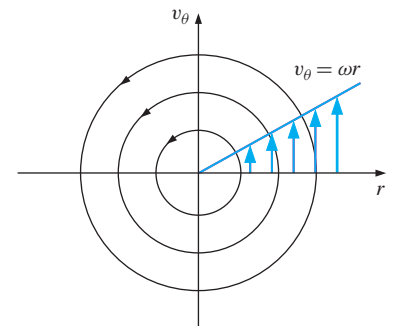
4.37 Il campo di velocità per una *rotazione rigida* nel piano $r - \theta$ è definito da

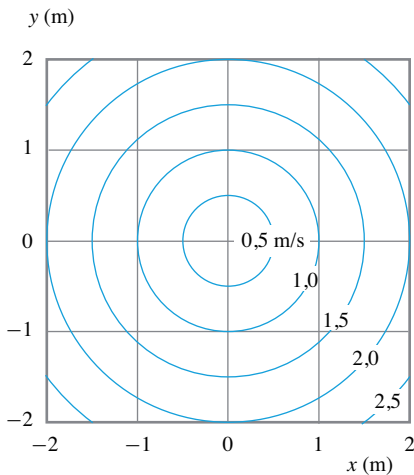
$$v_r = 0 \quad v_\theta = \omega r$$

dove ω è il modulo della velocità angolare, avente la stessa direzione di z . Tracciare, per $\omega = 1,0 \text{ s}^{-1}$, le isolinee di velocità per 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 e 2,5 m/s.

Analisi Poiché $v_r = 0$ e ω è positiva, il modulo della velocità in un punto coincide con la componente secondo θ

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_\theta| = \omega r$$





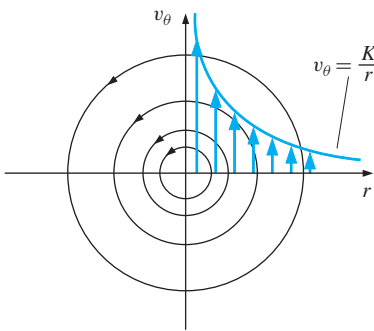
Pertanto, le isolette di velocità sono circonferenze di raggio

$$r = \frac{v}{\omega}$$

Per esempio, per $v = 2,0$ m/s e $\omega = 1$ rad/s, l'isoletta corrispondente è una circonferenza di raggio

$$r = \frac{2}{1} = 2 \text{ m}$$

Lo stesso semplice calcolo può essere fatto per gli altri valori della velocità, ottenendo la mappa di isolette riportata in figura. Si può osservare come la velocità aumenti man mano che ci si allontana dal centro di rotazione.



4.38 Il campo di velocità per un vortice lineare nel piano $r - \theta$ è definito da

$$v_r = 0 \quad v_\theta = \frac{K}{r}$$

dove K è il'intensità del vortice. Tracciare, per $K = 1,0$ m²/s, le isolette di velocità per 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 e 2,5 m/s.

Analisi Poiché $v_r = 0$ e K è positiva, il modulo della velocità in un punto coincide con la componente secondo θ

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_\theta| = \frac{K}{r}$$

Pertanto, le isolette di velocità sono circonferenze di raggio

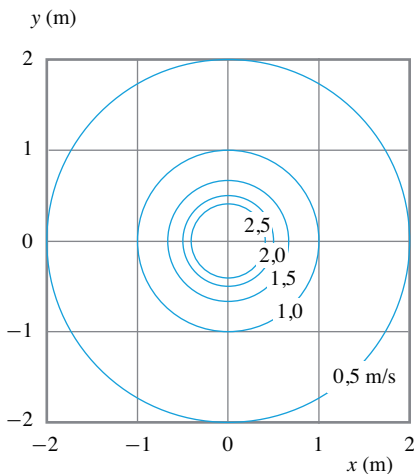
$$r = \frac{K}{v}$$

Per esempio, per $v = 2,0$ m/s e $K = 1,0$ m²/s, l'isoletta corrispondente è una circonferenza di raggio

$$r = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m}$$

Lo stesso semplice calcolo può essere fatto per gli altri valori della velocità, ottenendo la mappa di isolette in figura. Si può osservare come la velocità diminuisca man mano che ci si allontana dal centro di rotazione.

Discussione Le isolette non sono equidistanti perché la velocità non varia linearmente con la distanza dall'origine.



4.39 Il campo di velocità per una *sorgente lineare* nel piano $r - \theta$ è definito da

$$v_r = \frac{m}{2\pi r} \quad v_\theta = 0$$

dove m è l'intensità della sorgente. Tracciare, per $m/2\pi = 1,0 \text{ m}^2/\text{s}$, le isolinee di velocità per 0,5 - 1,0 - 1,5 - 2,0 e 2,5 m/s.

Analisi Poiché $v_\theta = 0$ e m è positiva, il modulo della velocità in un punto coincide con la componente secondo r

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_r| = \frac{m}{2\pi r}$$

Pertanto, le isolinee di velocità sono circonferenze di raggio

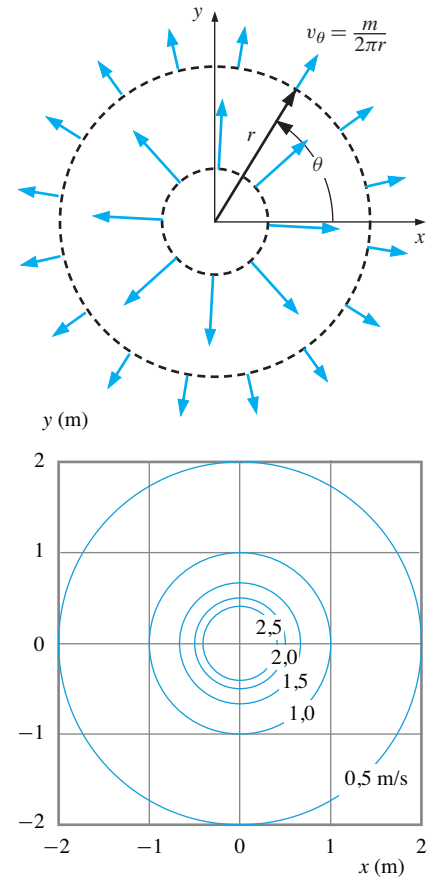
$$r = \frac{m}{2\pi v}$$

Per esempio, per $v = 2,0 \text{ m/s}$ e $m/2\pi = 1,0 \text{ m}^2/\text{s}$, l'isolinea corrispondente è una circonferenza di raggio

$$r = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m}$$

Lo stesso semplice calcolo può essere fatto per gli altri valori della velocità, ottenendo la mappa di isolinee in figura. Si può osservare come la velocità diminuisca man mano che ci si allontana dal centro di rotazione.

Discussione Le isolinee non sono equidistanti perché la velocità non varia linearmente con la distanza dall'origine.



Moto e deformazione di elementi di fluido

4.40 Descrivere brevemente i quattro tipi fondamentali di moto e deformazione delle particelle di fluido.

Analisi

1. **Traslazione:** una particella di fluido si sposta da un punto ad un altro.
2. **Rotazione:** una particella di fluido ruota attorno ad un asse passante per il suo baricentro.
3. **Deformazione lineare:** una particella di fluido si allunga o si accorcia in una certa direzione.
4. **Deformazione angolare:** una particella di fluido si deforma in modo che due linee, passanti per il suo baricentro e inizialmente perpendicolari, in un istante successivo non siano più perpendicolari tra loro.

Discussione In un moto complesso, tutti e quattro i tipi fondamentali di moto e deformazione possono essere contemporaneamente presenti.

4.41 Il campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15 è rotazionale o irrotazionale? Perché?

Analisi Il campo di velocità del problema 4.15 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx) \mathbf{i} - by \mathbf{j}$$

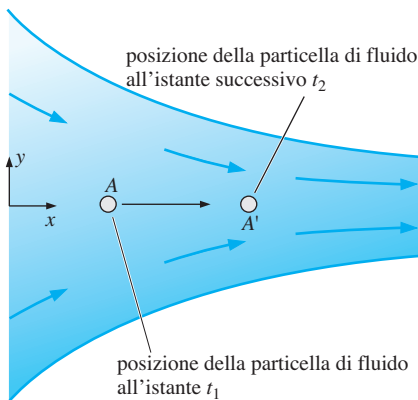
Per definizione, un moto è irrotazionale se la vorticità è identicamente nulla. In un moto bidimensionale nel piano xy , la vorticità è ortogonale al piano xy ed è data dalla 4.32

$$\Omega = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Nel caso in esame, essendo

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

si ha $\Omega = 0$ e, pertanto, il moto è irrotazionale.



4.42 Nel campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15, una particella di fluido che all'istante $t_1 = 0$ si trovi sull'asse x nel punto A , in un istante successivo t_2 , essendo il moto a simmetria assiale rispetto all'asse x , si sposterà lungo l'asse x nel punto A' . Scrivere la relazione che esprime l'ascissa x_p del punto raggiunto dalla particella in un generico istante t in funzione della posizione iniziale x_A e delle costanti V_0 e b . (Seguendo una particella di fluido si ha $v_x = dx_p/dt$; basta, pertanto, sostituire v_x , separare le variabili e integrare).

Analisi Il campo di velocità del problema 4.15 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx) \mathbf{i} - by \mathbf{j}$$

Per definizione (seguendo una particella di fluido), la componente v_x della velocità secondo x è pari alla derivata totale dello spazio percorso in direzione x rispetto al tempo

$$\frac{dx_p}{dt} = v_x = V_0 + bx_p$$

Separando le variabili, si ha

$$\frac{dx_p}{V_0 + bx_p} = dt$$

e, integrando,

$$\frac{1}{b} \ln(V_0 + bx_p) = t - \frac{1}{b} \ln C_1$$

avendo posto la costante di integrazione $C = (1/b) \ln C_1$. Raccogliendo, si ha

$$\ln [C_1(V_0 + bx_p)] = bt$$

ed, eliminando il logaritmo,

$$V_0 + bx_p = C_2 e^{bt}$$

avendo introdotto una nuova costante C_2 . Imponendo la condizione che per $t = 0$ sia $x_p = x_A$, si ha

$$C_2 = V_0 + bx_A$$

e, in definitiva,

$$x_p = \frac{1}{b} \left[(V_0 + bx_A) e^{bt} - V_0 \right]$$

4.43 Nel campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15, essendo il moto a simmetria assiale rispetto all'asse x , le particelle che all'istante $t_1 = 0$ si trovano sul segmento AB , di lunghezza ξ , giacente sull'asse x , si spostano lungo l'asse x portandosi sul segmento $A'B'$, di lunghezza $\xi + \Delta\xi$. Partendo dal risultato del problema precedente, scrivere la relazione che fornisce la variazione di lunghezza $\Delta\xi$.

Analisi Sulla base del risultato del problema precedente, si può scrivere

$$x_{A'} = \frac{1}{b} \left[(V_0 + bx_A) e^{bt} - V_0 \right]$$

e

$$x_{B'} = \frac{1}{b} \left[(V_0 + bx_B) e^{bt} - V_0 \right]$$

Essendo $\xi = x_B - x_A$ e $\xi + \Delta\xi = x_{B'} - x_{A'}$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= (x_{B'} - x_{A'}) - (x_B - x_A) = \\ &= \frac{1}{b} \left[(V_0 + bx_B) e^{bt} - V_0 \right] - \frac{1}{b} \left[(V_0 + bx_A) e^{bt} - V_0 \right] - (x_B - x_A) = \\ &= x_B e^{bt} - x_A e^{bt} - x_B + x_A = (x_B - x_A) (e^{bt} - 1) \end{aligned}$$

La variazione di lunghezza, in funzione del tempo, di un segmento di lunghezza $\xi = x_B - x_A$ che si muove lungo l'asse x è dunque

$$\Delta\xi = (x_B - x_A) (e^{bt} - 1) = \xi (e^{bt} - 1)$$

Si verifica facilmente che, per $t = 0$, risulta $\Delta\xi = 0$.

4.44 Partendo dal risultato del problema precedente, scrivere l'espressione della velocità di deformazione lineare in direzione x delle particelle di fluido che stanno sull'asse e confrontarla con l'espressione generale $\varepsilon_{xx} = \partial v_x / \partial x$. (Considerare il limite per $t \rightarrow 0$ e sviluppare in serie il termine e^{bt}).

Analisi Il risultato del problema precedente mostra che la variazione di lunghezza, in funzione del tempo, di un segmento di lunghezza $\xi = x_B - x_A$ che si muove lungo l'asse x è

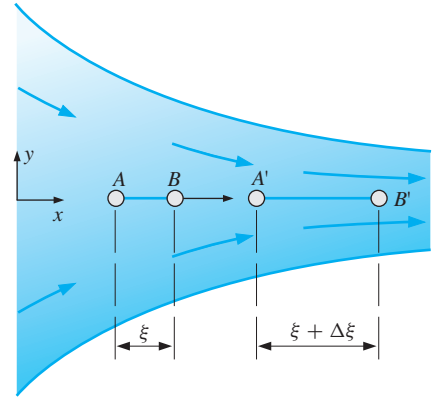
$$\Delta\xi = (x_B - x_A) (e^{bt} - 1) = \xi (e^{bt} - 1)$$

Poiché, per definizione, la velocità di deformazione lineare è la deformazione lineare nell'unità di tempo, cioè la velocità con la quale varia l'allungamento per unità di lunghezza, si ha

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d}{dt} \frac{(\xi + \Delta\xi) - \xi}{\xi} = \frac{d}{dt} \frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{d}{dt} (e^{bt} - 1)$$

Per $t \rightarrow 0$, è lecito considerare solo i primi due termini dello sviluppo in serie di e^{bt} e sostituire la derivata rispetto al tempo col termine $1/t$. Si ha, così,

$$e^{bt} = 1 + bt + \frac{(bt)^2}{2!} + \dots \cong 1 + bt$$



e, quindi,

$$\varepsilon_{xx} \cong \frac{1}{t} (1 + bt - 1) = b$$

L'espressione esatta è

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

che, essendo $v_x = (V_0 + bx)$, fornisce

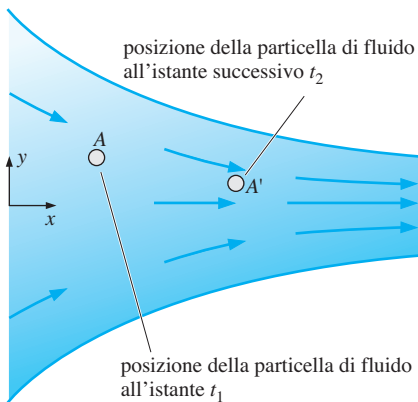
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = b$$

equivalente alla relazione approssimata precedente.

Discussione La relazione esatta mostra che $\varepsilon_{xx} = b$ ovunque nel campo di moto e non solo lungo l'asse del convergente. Allo stesso risultato si può pervenire senza sviluppare in serie il termine e^{bt} , ma calcolando la derivata

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d}{dt} (e^{bt} - 1) = b e^{bt}$$

e facendone il limite per $t \rightarrow 0$, che fornisce, infatti, $\varepsilon_{xx} = b$.



4.45 Nel campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15, una particella di fluido che all'istante $t_1 = 0$ si trovi nel punto $A(x_A, y_A)$, in un istante successivo t_2 si sposta nel punto $A'(x_{A'}, y_{A'})$. Scrivere la relazione che esprime l'ordinata y_p del punto raggiunto dalla particella in un generico istante t in funzione della posizione iniziale y_A e della costante b . (Seguendo una particella di fluido si ha $v_y = dy_p/dt$; basta, pertanto, sostituire v_y , separare le variabili e integrare).

Analisi Il campo di velocità del problema 4.15 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j}$$

Per definizione (seguendo una particella di fluido), la componente v_y della velocità secondo y è pari alla derivata totale dello spazio percorso in direzione y rispetto al tempo

$$\frac{dy_p}{dt} = v_y = -by_p$$

Separando le variabili, si ha

$$\frac{dy_p}{y_p} = -b dt$$

e, integrando,

$$\ln y_p = -bt - \ln C_1$$

avendo posto la costante di integrazione $C = \ln C_1$. Raccogliendo, si ha

$$\ln(C_1 y_p) = -bt$$

ed, eliminando il logaritmo,

$$y_p = C_2 e^{-bt}$$

avendo introdotto una nuova costante C_2 . Imponendo la condizione che per $t = 0$ sia $y_p = y_A$, si ha $C_2 = y_A$ e, in definitiva,

$$y_p = y_A e^{-bt}$$

Discussione La particella si avvicina all'asse x con legge esponenziale nel tempo. Contemporaneamente, essa si muove anche verso valle, nella direzione delle x positive. In questo particolare problema, v_y non risulta funzione di x , cioè lo spostamento in direzione x non ha influenza su quello in direzione y .

4.46 Nel campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15, le particelle che all'istante $t_1 = 0$ si trovano sul segmento verticale AB , di lunghezza η , si portano sul segmento $A'B'$, di lunghezza $\eta + \Delta\eta$. Partendo dal risultato del problema precedente, scrivere la relazione che fornisce la variazione di lunghezza $\Delta\eta$ (negativa).

Analisi Sulla base del risultato del problema precedente, si può scrivere

$$y_{A'} = y_A e^{-bt}$$

e

$$y_{B'} = y_B e^{-bt}$$

Essendo $\eta = y_B - y_A$ e $\eta + \Delta\eta = y_{B'} - y_{A'}$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= (y_{B'} - y_{A'}) - (y_B - y_A) = y_B e^{-bt} - y_A e^{-bt} - (y_B - y_A) = \\ &= y_B e^{-bt} - y_A e^{-bt} - y_B + y_A = (y_B - y_A) (e^{-bt} - 1) \end{aligned}$$

La variazione di lunghezza, in funzione del tempo, di un segmento verticale di lunghezza $\eta = y_B - y_A$ è, dunque,

$$\Delta\eta = (y_B - y_A) (e^{-bt} - 1) = \eta (e^{-bt} - 1)$$

Si verifica facilmente che, per $t = 0$, risulta $\Delta\eta = 0$.

4.47 Partendo dal risultato del problema precedente, scrivere l'espressione della velocità di deformazione lineare in direzione y e confrontarla con l'espressione generale $\varepsilon_{yy} = \partial v_y / \partial y$.

Analisi Il risultato del problema precedente mostra che la variazione di lunghezza, in funzione del tempo, di un segmento verticale di lunghezza $\eta = y_B - y_A$ è

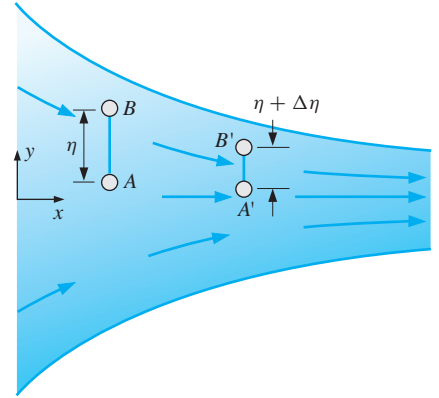
$$\Delta\eta = (y_B - y_A) (e^{-bt} - 1) = \eta (e^{-bt} - 1)$$

Poiché, per definizione, la velocità di deformazione lineare è la deformazione lineare nell'unità di tempo, cioè la velocità con la quale varia l'allungamento per unità di lunghezza, si ha

$$\varepsilon_{yy} = \frac{d}{dt} \frac{(\eta + \Delta\eta) - \eta}{\eta} = \frac{d}{dt} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{d}{dt} (e^{-bt} - 1)$$

Per $t \rightarrow 0$, è lecito considerare solo i primi due termini dello sviluppo in serie di e^{-bt} e sostituire la derivata rispetto al tempo col termine $1/t$. Si ha, così,

$$e^{-bt} = 1 + (-bt) + \frac{(-bt)^2}{2!} + \dots \cong 1 - bt$$



e, quindi,

$$\varepsilon_{yy} \cong \frac{1}{t} (1 - bt - 1) = -b$$

L'espressione esatta è

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

che, essendo $v_y = -by$, fornisce

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -b$$

equivalente alla relazione approssimata precedente.

Discussione Poiché in questo particolare problema v_y non dipende da x , i calcoli risultano particolarmente semplici. In generale, quando sia v_x che v_y sono funzione sia di x che di y , è necessario integrare numericamente. Allo stesso risultato si può pervenire senza sviluppare in serie il termine e^{-bt} , ma calcolando la derivata

$$\varepsilon_{yy} = \frac{d}{dt} (e^{-bt} - 1) = -b e^{-bt}$$

e facendone il limite per $t \rightarrow 0$, che fornisce, infatti, $\varepsilon_{yy} = -b$.

4.48 Usando la definizione di velocità di deformazione cubica, verificare che il fluido del campo di moto permanente bidimensionale del problema 4.15 è incomprimibile.

Analisi Il campo di velocità del problema 4.15 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_0 + bx) \mathbf{i} - by \mathbf{j}$$

Per la 4.25, la velocità di deformazione cubica, in coordinate cartesiane, è

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = b - b = 0$$

Essendo la velocità di deformazione cubica ovunque nulla, **il fluido è incomprimibile.**

Discussione Ciascuna particella di fluido si allunga in direzione orizzontale e si accorcia in direzione verticale, ma il suo volume totale non varia.

4.49 Calcolare le componenti del campo di accelerazione secondo x e y del campo di velocità permanente bidimensionale lineare in x e y

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_x + a_1x + a_2y) \mathbf{i} + (V_y + b_1x + b_2y) \mathbf{j}$$

in cui V_x , V_y e i coefficienti sono costanti.

Analisi In coordinate cartesiane, per le 4.11, il campo di accelerazione è

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= a_1 (V_x + a_1 x + a_2 y) + a_2 (V_y + b_1 x + b_2 y) \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ &= b_1 (V_x + a_1 x + a_2 y) + b_2 (V_y + b_1 x + b_2 y) \end{aligned}$$

4.50 Con riferimento al campo di velocità del problema precedente, quale relazione deve sussistere tra i coefficienti perché il fluido sia incomprimibile?

Analisi Per la 4.25, la velocità di deformazione cubica, in coordinate cartesiane, è

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = a_1 + b_2$$

Perché il fluido sia incomprimibile, la velocità di deformazione cubica deve essere ovunque nulla. Pertanto deve essere

$$a_1 + b_2 = 0$$

Discussione Se la relazione precedente è soddisfatta, il fluido è incomprimibile, indipendentemente dal valore assunto dagli altri coefficienti.

4.51 Con riferimento al campo di velocità del problema 4.49, calcolare le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y .

Analisi Il campo di velocità del problema 4.49 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_x + a_1 x + a_2 y) \mathbf{i} + (V_y + b_1 x + b_2 y) \mathbf{j}$$

Per le 4.24, le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y valgono

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = a_1 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = b_2 \end{aligned}$$

Discussione Essendo, in generale, i coefficienti a_1 e b_2 non nulli, le particelle, nel loro moto, si allungano o si accorciano nelle direzioni x e y .

4.52 Con riferimento al campo di velocità del problema 4.49, calcolare la velocità di deformazione angolare nel piano xy .

Analisi Il campo di velocità del problema 4.49 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_x + a_1x + a_2y)\mathbf{i} + (V_y + b_1x + b_2y)\mathbf{j}$$

Per le 4.27, la velocità di deformazione angolare nel piano xy , in coordinate cartesiane, vale

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(b_1 + a_2)$$

Discussione Essendo, in generale, i coefficienti a_2 e b_1 non nulli, le particelle, nel loro moto, si deformano a causa degli sforzi tangenziali nelle direzioni x e y .

4.53 Combinando i risultati dei problemi 4.51 e 4.52, scrivere il tensore del secondo ordine delle velocità di deformazione ε_{ij} nel piano xy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Qual è la condizione affinché x e y siano assi principali?

Analisi Il campo di velocità del problema 4.49 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_x + a_1x + a_2y)\mathbf{i} + (V_y + b_1x + b_2y)\mathbf{j}$$

Per la 4.28, il tensore delle velocità di deformazione nel piano xy , in coordinate cartesiane, è

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1}{2}(b_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + a_2) & b_2 \end{pmatrix}$$

Affinché x e y siano assi principali, tutti gli elementi del tensore, ad eccezione di quelli sulla diagonale principale, devono essere nulli. Pertanto, nel caso considerato, deve essere

$$b_1 + a_2 = 0$$

4.54 Con riferimento al campo di velocità del problema 4.49, calcolare il vettore vorticità.

Analisi Il campo di velocità del problema 4.49 è descritto dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (V_x + a_1x + a_2y)\mathbf{i} + (V_y + b_1x + b_2y)\mathbf{j}$$

Per la 4.31, il vettore vorticità risulta pari a

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (b_1 - a_2) \mathbf{k}$$

cioè ha componente diversa da zero solo in direzione z .

Discussione Per qualunque moto bidimensionale nel piano xy , il vettore vorticità deve avere la direzione dell'asse z . Nel caso considerato, il verso del vettore dipende dal segno di $b_1 - a_2$.

4.55 Un contenitore d'acqua cilindrico ruota in senso antiorario attorno al suo asse verticale a 360 gpm. Calcolare la vorticità delle particelle di liquido nel contenitore.

Ipotesi Il moto è permanente.

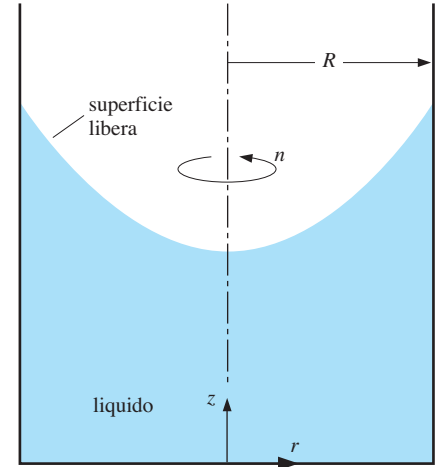
Analisi Essendo n il numero di giri al minuto, la velocità angolare ω è

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{2\pi}{60} \times 360 = 37,7 \text{ rad/s}$$

Per la 4.30, il vettore vorticità Ω è pari al doppio del vettore velocità angolare ω . Pertanto

$$\Omega = 2\omega = 2 \times 37,7 = 75,4 \text{ k rad/s}$$

Discussione L'acqua nel contenitore ruota come un corpo rigido. Pertanto, la vorticità è ovunque costante e diretta verso l'alto.



4.56 In un contenitore d'acqua cilindrico in rotazione attorno al suo asse verticale z , la vorticità misurata in direzione z risulta pari a $-55,4 \text{ rad/s}$, valore costante entro il $\pm 0,5\%$ in qualunque punto di misura. Calcolare la velocità angolare in gpm e stabilire il verso di rotazione.

Analisi Per la 4.30, il vettore vorticità Ω è pari al doppio della velocità angolare ω . Pertanto, è

$$\omega = \frac{\Omega}{2} = \frac{-55,4}{2} = -27,7 \text{ k rad/s}$$

Essendo la velocità angolare negativa, il verso di rotazione è orario. In giri al minuto, la velocità di rotazione n è

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = \frac{60}{2 \times \pi} \times (-27,7) = -265 \text{ gpm}$$

Discussione La vorticità è ovunque costante. Pertanto, l'acqua nel contenitore ruota come un corpo rigido.

4.57 Un contenitore cilindrico, di raggio $R = 0,35 \text{ m}$, in rotazione attorno al suo asse verticale z , è parzialmente pieno d'olio. In corrispondenza del bordo, la velocità è di $2,6 \text{ m/s}$ in direzione antioraria (guardando dall'alto). Calcolare la componente della vorticità in direzione z di una qualunque particella di fluido.

Analisi Essendo V la velocità a distanza R dall'asse, la velocità angolare ω è

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2,6}{0,35} = 7,43 \text{ rad/s}$$

Per la 4.30, il vettore vorticità Ω è pari al doppio della velocità angolare ω . Per cui

$$\Omega = 2\omega = 2 \times 7,43 \text{ k} = 14,9 \text{ k rad/s}$$

4.58 Illustrare la relazione tra vorticità e rotazionalità.

Analisi La vorticità è una misura della rotazionalità di una particella di fluido. Se la particella ruota, la sua vorticità è non nulla. Matematicamente, **il vettore vorticità è il doppio del vettore velocità angolare**. Se la vorticità è nulla, il moto si dice irrotazionale.

4.59 Un campo di velocità permanente tridimensionale è descritto dalla

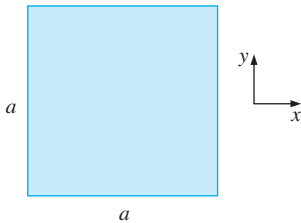
$$\mathbf{v} = (3,0 + 2,0x - y)\mathbf{i} + (2,0x - 2,0y)\mathbf{j} + (0,5xy)\mathbf{k}$$

Calcolare il campo di vorticità in funzione di x , y , z .

Analisi Per la 4.31, il vettore vorticità, in coordinate cartesiane, è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= (0,5x - 0)\mathbf{i} + (0 - 0,5y)\mathbf{j} + (2,0 + 1,0)\mathbf{k} = \\ &= 0,5x\mathbf{i} - 0,5y\mathbf{j} + 3,0\mathbf{k}\end{aligned}$$

Discussione Essendo la vorticità non nulla, il moto è *rotazionale*.



4.60 In un campo di moto bidimensionale di un fluido incompressibile, una particella di fluido, inizialmente quadrata, di lato a , con lati paralleli agli assi x e y , si muove e si deforma. In un istante successivo, la particella è ancora allineata con gli assi x e y , ma si è allungata in direzione x divenendo un rettangolo di base $2a$. Quanto misura in direzione y ?

Analisi Essendo il fluido incompressibile e il moto bidimensionale, l'area della particella deve rimanere la stessa (per un fluido incompressibile, la velocità di deformazione cubica deve essere ovunque nulla). Tale area è inizialmente pari a a^2 , per cui la dimensione a_1 della particella in direzione y in un istante successivo è

$$a_1 = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

Discussione Poiché la particella si allunga di un fattore 2 nella direzione x , essa si accorcia nello stesso rapporto nella direzione y .

4.61 In un campo di moto bidimensionale di un fluido *compressibile*, una particella di fluido, inizialmente quadrata, di lato a , con lati paralleli agli assi x e y , si muove e si deforma. In un istante successivo, la particella è ancora allineata con gli assi x e y , ma si è deformata diventando un rettangolo che misura $1,06a$ in direzione x e $0,931a$ in direzione y . Di quanto è variata, in percentuale, la densità della particella di fluido?

Analisi L'area della particella è inizialmente pari a a^2 . Per definizione, la densità iniziale ρ della particella di fluido è pari al rapporto tra la sua massa m ed il volume iniziale W . Per cui, per una profondità unitaria, è

$$\rho = \frac{m}{W} = \frac{m}{a^2 \times 1} = \frac{m}{a^2}$$

Quando la particella si muove e si deforma, la sua massa si conserva. Essendo il moto bidimensionale, la dimensione unitaria nella direzione della profondità rimane immutata. Pertanto, in un istante successivo la densità vale

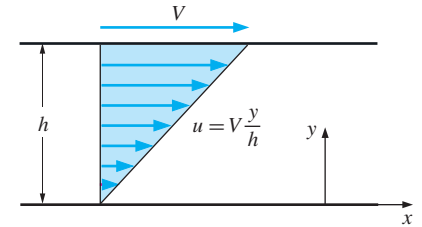
$$\rho_1 = \frac{m}{W_1} = \frac{m}{1,06 a \times 0,931 a \times 1} = 1,013 \frac{m}{a^2}$$

Quindi, rispetto al valore iniziale, la densità aumenta dell'1,3% circa.

Discussione La particella si allunga in direzione x e si accorcia in direzione y , ma, poiché il suo volume diminuisce, la densità aumenta.

4.62 Nel moto permanente bidimensionale nel piano xy di un fluido incomprimibile tra due lastre piane parallele indefinite distanti h , di cui quella superiore in moto con velocità V e quella inferiore in quiete (moto alla Couette), il campo di velocità è definito da

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = V \frac{y}{h} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}$$



Stabilire se il moto è rotazionale e, in caso affermativo, calcolare la componente della vorticità in direzione z e individuare se le particelle ruotano in senso orario o antiorario.

Analisi Per definizione, un moto è rotazionale se la vorticità è non nulla. In un moto bidimensionale nel piano xy , la vorticità può essere diversa da zero solo in direzione z e, per la 4.32, vale

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\frac{V}{h} \mathbf{k}$$

Pertanto, essendo la vorticità non nulla, il moto è rotazionale. Risultando essa negativa, le particelle ruotano in verso orario.

Discussione All'interno del campo di moto, la vorticità è costante ovunque.

4.63 Per il moto alla Couette del problema precedente, calcolare le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y e la velocità di deformazione angolare ε_{xy} .

Analisi Il campo di velocità del problema precedente è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = V \frac{y}{h} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}$$

Pertanto, per le 4.24, le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y valgono

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Per le 4.27, la velocità di deformazione angolare nel piano xy è

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{h} + 0 \right) = \frac{V}{h}$$

Discussione Essendo nulle le velocità di deformazione lineare e non nulla la velocità di deformazione angolare, a causa degli sforzi tangenziali le particelle si deformano, ma non si allungano né si accorciano nelle direzioni x e y .

4.64 Usando i risultati del problema precedente, scrivere il tensore del secondo ordine delle velocità di deformazione ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

e stabilire se gli assi x e y sono assi principali.

Analisi Sulla base dei risultati del problema precedente, per la 4.28, il tensore delle velocità di deformazione nel piano xy risulta

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V}{2h} \\ \frac{V}{2h} & 0 \end{pmatrix}$$

Perché gli assi x e y siano assi principali, tutti gli elementi del tensore, ad eccezione di quelli sulla diagonale principale, debbono essere nulli. Nel caso considerato si ha proprio il contrario, per cui **gli assi x e y non sono assi principali**.

Teorema del trasporto di Reynolds

4.65 Indicare se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, giustificando brevemente le risposte:

- (a) Il teorema del trasporto di Reynolds serve per trasformare i principi di conservazione dalla loro forma naturale, valida per un volume di controllo, alla forma valida per un sistema.
- (b) Il teorema del trasporto di Reynolds si può applicare solo a volumi di controllo che non si deformano.
- (c) Il teorema del trasporto di Reynolds si può applicare a campi di moto sia permanenti sia vari.
- (d) Il teorema del trasporto di Reynolds si può applicare a quantità sia scalari sia vettoriali.

Analisi

- (a) **Falso**: è vero l'opposto, poiché le leggi di conservazione della fisica sono scritte con riferimento ad un sistema.
- (b) **Falso**: il teorema del trasporto di Reynolds si può applicare a qualunque volume di controllo, fisso o che si muova o si deformi.
- (c) **Vero**: il teorema del trasporto di Reynolds contiene un termine funzione del tempo e si può applicare anche a campi di moto vario.
- (d) **Vero**: nel teorema del trasporto di Reynolds la proprietà estensiva B (o la corrispondente intensiva b) può essere qualunque proprietà del fluido, sia scalare che vettoriale.

Riepilogo

4.66 Nel moto permanente bidimensionale nel piano xy di un fluido incomprimibile tra due lastre piane parallele indefinite in quiete distanti h , forzato da un gradiente di pressione dp/dx costante e negativo (moto alla Poiseuille), la velocità ha componenti

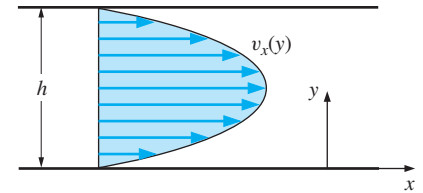
$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad v_y = 0$$

dove μ è la viscosità del fluido. Stabilire se il moto è rotazionale e, in caso affermativo, calcolare la componente della vorticità in direzione z e individuare se le particelle ruotano in senso orario o antiorario.

Analisi Per definizione, un moto è rotazionale se la vorticità è non nulla. In un moto bidimensionale nel piano xy , la vorticità può essere diversa da zero solo in direzione z e, per la 4.32, vale

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) \mathbf{k}$$

Essendo la vorticità non nulla, il moto è **rotazionale**. Nella metà inferiore del campo di moto ($y < h/2$) essa risulta negativa (dp/dx è negativo) e quindi **nella metà inferiore del campo di moto le particelle ruotano in verso orario**. Analogamente, **nella metà superiore del campo di moto le particelle ruotano in verso antiorario**. Nella sezione trasversale, la vorticità varia con legge lineare.



4.67 Per il moto alla Poiseuille del problema precedente, calcolare le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y e la velocità di deformazione angolare ε_{xy} .

Analisi Nel moto di Poiseuille del problema precedente, la velocità ha componenti

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad v_y = 0$$

Per le 4.24, le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e y valgono

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Per le 4.27, la velocità di deformazione angolare nel piano xy è

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h)$$

Discussione Essendo nulle le velocità di deformazione lineare e non nulla la velocità di deformazione angolare, a causa degli sforzi tangenziali le particelle si deformano, ma non si allungano né si accorciano nelle direzioni x e y .

4.68 Usando i risultati del problema precedente, scrivere il tensore del secondo ordine delle velocità di deformazione ε_{ij}

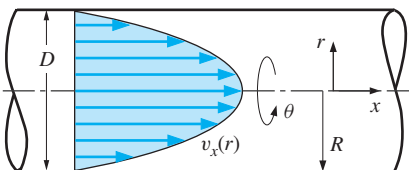
$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

e stabilire se gli assi x e y sono assi principali.

Analisi Sulla base dei risultati del problema precedente, per la 4.28, il tensore delle velocità di deformazione nel piano xy risulta

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) \\ \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) & 0 \end{pmatrix}$$

Perché gli assi x e y siano assi principali, tutti gli elementi del tensore, ad eccezione di quelli sulla diagonale principale, debbono essere nulli. Nel caso considerato si ha proprio il contrario, per cui **gli assi x e y non sono assi principali**.



4.69 Nel moto permanente a simmetria assiale di un fluido incomprimibile in una tubazione circolare di raggio R , forzato da un gradiente di pressione dp/dx costante e negativo (moto alla Poiseuille), la velocità ha componenti

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \quad v_r = 0 \quad v_\theta = 0$$

dove μ è la viscosità del fluido. Stabilire se il moto è rotazionale e, in caso affermativo, calcolare la componente della vorticità in direzione θ e individuare il verso della rotazione.

Analisi Per definizione, un moto è rotazionale se la vorticità è non nulla. Per la 4.33, la componente della vorticità in direzione θ è

$$\Omega_\theta = \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r$$

Poiché la vorticità è non nulla, il moto è rotazionale. Inoltre, essendo dp/dx negativo, la vorticità risulta positiva e, pertanto, è diretta come l'asse x . Le particelle di fluido ruotano, quindi, nel verso positivo di θ , cioè in senso antiorario.

Discussione Nella sezione trasversale, la vorticità varia con legge lineare dal valore nullo in corrispondenza dell'asse ad un valore massimo sulla parete della tubazione.

4.70 Con riferimento al moto alla Poiseuille a simmetria assiale del problema precedente, calcolare le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e r e la velocità di deformazione angolare ε_{xr} . Il tensore delle velocità di deformazione in coordinate cilindriche (r, θ, x) è

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Analisi Nel moto di Poiseuille del problema precedente, la velocità ha componenti

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \quad v_r = 0 \quad v_\theta = 0$$

Le velocità di deformazione lineare nelle direzioni x e r valgono

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

e

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$$

La velocità di deformazione angolare nel piano xr è

$$\varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \frac{r}{4\mu} \frac{dp}{dx}$$

Discussione Essendo nulle le velocità di deformazione lineare e non nulla la velocità di deformazione angolare, a causa degli sforzi tangenziali le particelle si deformano, ma non si allungano né si accorciano nelle direzioni orizzontale e radiale.

4.71 Usando i risultati del problema precedente, scrivere il tensore del secondo ordine delle velocità di deformazione ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

e stabilire se gli assi x e r sono assi principali.

Analisi Il tensore delle velocità di deformazione è

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r}{4\mu} \frac{dp}{dx} \\ \frac{r}{4\mu} \frac{dp}{dx} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Perché gli assi x e r siano assi principali, tutti gli elementi del tensore, ad eccezione di quelli sulla diagonale principale, debbono essere nulli. Nel caso considerato si ha proprio il contrario, per cui **gli assi x e r non sono assi principali**.

4.72 In un campo di velocità permanente bidimensionale nel piano xy , la velocità ha componente secondo x

$$v_x = a + b(x - c)^2$$

con a , b e c costanti. Determinare l'espressione della componente secondo y perché il fluido sia incomprimibile.

Analisi Affinché il fluido sia incomprimibile, la velocità di deformazione cubica deve essere ovunque nulla, cioè

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dW} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Pertanto, deve essere

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Introducendo l'espressione di v_x si ha

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -2b(x - c)$$

e, integrando,

$$v_y = \int \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = \int [-2b(x - c)] dy + f(x) = -2b(x - c)y + f(x)$$

in cui compare una funzione di x anziché una costante perché l'integrazione è parziale rispetto a y .

Discussione Si può verificare facilmente che

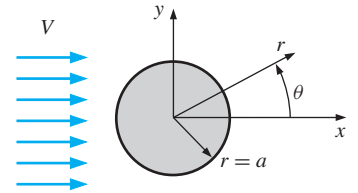
$$\frac{1}{W} \frac{dW}{W} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2b(x-c) - 2b(x-c) = 0$$

cioè la velocità di deformazione cubica è ovunque nulla per qualunque funzione $f(x)$. Quindi il campo di velocità avente le componenti sopra definite è quello di un fluido incomprimibile.

4.73 Il campo di moto di una corrente non confinata in moto uniforme con velocità V , che investe un lungo cilindro circolare con l'asse ortogonale alla direzione della corrente, può essere rappresentato ovunque, tranne che in un sottile strato limite a ridosso della superficie del cilindro, dalle componenti di velocità nel piano xy o $r\theta$

$$v_r = V \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$v_\theta = -V \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$



Stabilire se il moto è rotazionale o irrotazionale.

Ipotesi 1 Il moto è permanente. **2** Il moto è bidimensionale nel piano $r\theta$.

Analisi Essendo il moto bidimensionale nel piano $r\theta$, l'unica componente della vorticità che può essere diversa da zero è quella in direzione z , che, in coordinate cilindriche, è

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[-r V \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[V \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \left(-V \sin \theta + V \frac{a^2}{r^2} \sin \theta + V \sin \theta - V \frac{a^2}{r^2} \sin \theta \right) = 0 \end{aligned}$$

Essendo la vorticità identicamente nulla, il moto è irrotazionale.

Discussione Mentre si muovono attorno al cilindro, le particelle si deformano ma la loro rotazione risultante è nulla.

4.74 Con riferimento al campo di moto del problema precedente, stabilire se nella metà del campo di moto a monte del cilindro ($x < 0$) c'è un punto di ristagno. In caso affermativo, determinare la posizione del punto sia in coordinate cilindriche (r, θ) sia cartesiane (x, y).

Analisi In un punto di ristagno, le componenti della velocità devono essere identicamente nulle. Per cui, deve essere

$$v_r = V \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) = 0$$

$$v_\theta = -V \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) = 0$$

equazioni soddisfatte, rispettivamente, per $\cos \theta = 0$ o $r^2 = a^2$ e per $\sin \theta = 0$ o $r^2 = -a^2$. La quarta condizione è impossibile in quanto il raggio a del cilindro è un numero reale. Quindi, deve essere $\sin \theta = 0$, cioè $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$. Nella metà del campo di moto a monte del cilindro, è $\theta = 180^\circ$. Per $\theta = 180^\circ$, poi, si ha $\cos \theta = -1$, per cui, dalla seconda condizione, deve essere $r = a$. Pertanto, esiste un punto di ristagno a monte del cilindro, di coordinate cilindriche $r = a$, $\theta = 180^\circ$ e coordinate cartesiane $x = -a$, $y = 0$, localizzato, pertanto, sull'asse x sul fronte del cilindro.

Discussione Il risultato è congruente con quanto suggerisce l'intuito, in quanto in corrispondenza del fronte del cilindro il fluido deve aggirare l'ostacolo.

4.75 Con riferimento al campo di moto del problema 4.73, calcolare la velocità di deformazione angolare $\varepsilon_{r\theta}$ nel piano $r\theta$ e stabilire se le particelle di fluido si deformano o no, usando il tensore delle deformazioni in coordinate cilindriche riportato nel problema 4.70.

Analisi Le componenti di velocità nel piano xy o $r\theta$ sono

$$v_r = V \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$v_\theta = -V \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Il tensore delle velocità di deformazione in coordinate cilindriche (r, θ, x) è

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

per cui

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ r V \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3} \right) + \frac{1}{r} \left[-V \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} V \sin \theta \left(\frac{1}{r} + 3 \frac{a^2}{r^3} - \frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^3} \right) = 2 \frac{a^2}{r^3} V \sin \theta
 \end{aligned}$$

La velocità di deformazione angolare è non nulla, per cui le particelle di fluido si deformano durante il moto.

Discussione La velocità di deformazione angolare diminuisce rapidamente con il cubo della distanza dal cilindro.

