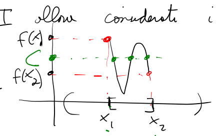
17 ottobre

Ieri

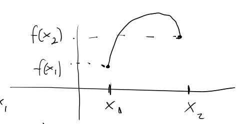
Teorema (Zeri) Dati $a<b$ in $\mathbb{R}$ e $f \in C^0([a,b])$ t.c. $f(a)f(b)<0$, allora $\exists \; x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0)=0$.

<u>Corollario</u> (Teor dei valori intermedi) Sia I un intervallo, $f \in C^0(I)$. Considerati due punti $x_1 < x_2$ punti in I allora considerati i valori $f(x_1)$ ed $f(x_2)$,



allora per ogni numero reale C compreso tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ esiste c in $[x_1, x_2]$ $(\subseteq I)$ t.c. $f(c)=C$.

Osservazione. Se $f(x_1)=f(x_2)$ può essere solo $C = f(x_1)=f(x_2)$ ed allora il Teorema è banale perché basta prendere $c = x$.



$C = f(x_1) \Rightarrow c = x_1$

<u>Dim</u> (Teor valori intermedi) Sia C un numero compreso tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$. Se $C=f(x_1)$ basta prendere $c=x_1$, se $C=f(x_2)$ basta prendere $c=x_2$. Supponiamo ora che C sia strettamente compreso tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ dove supponiamo $f(x_1) > f(x_2)$, ossia $f(x_1) > C > f(x_2)$.

Si introduce $g(x) = f(x) - C$.

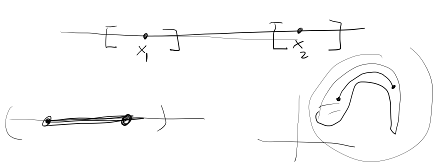
Si ha $g \in C^0([x_1, x_2])$.

Inoltre $g(x_1) = f(x_1) - C > 0$ e
$g(x_2) = f(x_2) - C < 0$.

Pertanto $g(x_1)\, g(x_2) < 0$. Applichiamo il Teor degli Zeri a g in $[x_1, x_2]$: esiste un $c \in (x_1, x_2)$ t.c. $g(c)=0$

$$0 = g(c) = f(c) - C \Rightarrow f(c) = C. \quad \square$$

<u>Def</u> Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice connesso se X è o un intervallo o un insieme costituito da un unico punto.



Un modo equivalente per formulare il teorema dei valori intermedi è il seguente

<u>Teor</u> (Teor valori intermedi versione 2)
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f \in C^0(X)$.
Allora se $I \subseteq X$ è un intervallo l'insieme $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è connesso.

Def (Punti di max/min)

Sia X un insieme ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora un punto $x_M \in X$ è detto un punto di massimo (assoluto) di f se

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Un punto $x_m \in X$ è detto un punto di minimo (assoluto) di f se

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in X. \qquad \square$$

$f(x_M)$ è detto valore massimo
$f(x_m)$ minimo

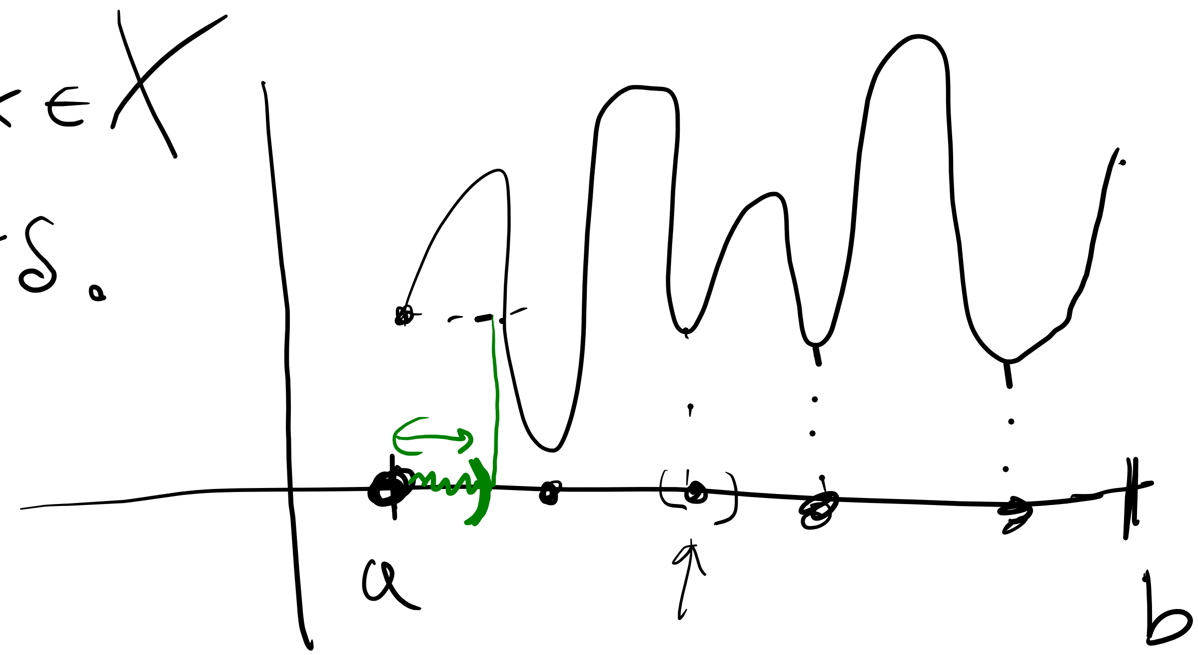
x_m e x_M vengono anche detti estremi della funzione.

<u>Def</u> (estremi relativi o locali di una funzione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Un punto x_0 si dice di minimo relativo (o locale) se $\exists$ un $\delta > 0$ t.c.

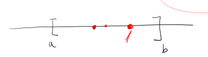
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$
$$\text{con } |x - x_0| < \delta.$$



Un punto $\bar{x}$ si dice di massimo relativo (o locale) se $\exists$ un $\delta > 0$ t.c.

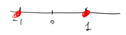
$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in X \text{ con } |x - \bar{x}| < \delta.$$

Il massimo teorema sarà il teorema di Bolzano-Weierstrass .. $\{x_n\}$ $x_n \in [a,b]$

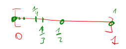


Es $\{1,-1,1,-1,1,-1 \dots\}$

$[-1,1]$



$\frac{1}{n}$



Teo (Bolzano Weierstrass) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione contenuta in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora esistono un punto $\bar{x} \in [a,b]$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

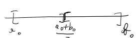
<u>Dim</u> Si costruirà una successione di intervalli $\{[a_k, b_k]\}_{k\geq 0}$ dove

$[a_0, b_0] = [a,b]$ ed

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \\ \text{o} \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] \end{cases}$$

e per ogni $[a_k, b_k]$ esisterà un x_{n_k} elemento della successione con $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ ed inoltre $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$ sarà un sotto-successione di $\{x_n\}$

Si parte da $[a_0, b_0] = [a,b]$

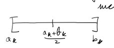


Scelgo $[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}] & \text{se contiene infiniti elementi della successione} \\ \text{altrimenti scelgo} \\ [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0] \end{cases}$

Supponiamo di avere definito

$[a_0, b_0], \dots, [a_k, b_k]$ tutti intervalli contenenti infiniti elementi della successione

a_{k+1}, b_k



$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{se contiene infiniti elementi della successione} \\ \text{altrimenti} \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]. \end{cases}$$

Resta per induzione definito una successione $\{[a_k, b_k]\}_{k\geq 0}$

con $\forall k$ $\begin{cases} b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \\ \text{e } [a_k, b_k] \text{ contiene infiniti elementi della successione } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{e } [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \end{cases}$

Ora definire una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la proprietà che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\forall k \geq 0$.

$[a_0, b_0] = [a,b]$ posso scegliere come x_{n_0} un qualsiasi elemento della successione perché $x_{n_0} \in [a_0, b_0]$ $\forall n_0$.

Devo scegliere $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ con $n_1 > n_0$

E così via, dopo avere scelto

$x_{n_0} \in [a_0, b_0], \dots, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

con $n_0 < n_1 < \dots < n_k$

Quando considero $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ e so che $\exists$ un $n_{k+1} > n_k$ t.c. $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Conclusione, per induzione ho definito una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$ t.c. $\underset{\downarrow \bar{x}}{a_k} \leq x_{n_k} \leq \underset{\downarrow \bar{x}}{b_k}$ $\forall k \geq 0$.

Come nel teorema degli zeri, esistono α e β con

$\alpha = \lim_{k\to+\infty} a_k$, $\beta = \lim_{k\to+\infty} b_k$.

Inoltre $\beta = \alpha =: \bar{x}$. Per i

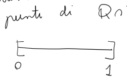
Carabinieri $\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$

<u>Esempio</u> L'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Cantor

$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{5}$	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
$\cancel{\frac{2}{1}}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	...
$\cancel{\frac{3}{1}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$\exists$ una successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ in $[0,1]$ t.c. i valori della successione sono esattamente tutti i punti di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$



Per questo particolare successione risulta che $\forall \bar{x} \in [0,1]$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 0}$ t.c. $\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$

Se invece $\{x_n\}$ è una successione in $[a,b]$ che ha limite $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$ allora l'unico $\bar{x}$ possibile del teorema è $L = \bar{x}$.