Lezione 12 - 17/10/2025

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}$

def. sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$
diciamo intervallo aperto centrato in x_0, di raggio r
l'insieme $]x_0 - r, x_0 + r[$

$I_{x_0,r} = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

$\Updownarrow$

$-r < x - x_0 < r$

$x_0 - r < x < x_0 + r$

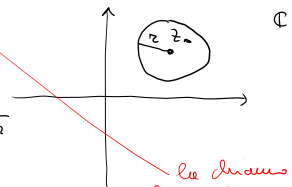
oss. posso definire anche gli intervalli aperti centrati di un numero complesso.

$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

$z = x + iy$

$z_0 = x_0 + iy_0$

$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$



le chiamo palle centrate aperte.

oss. Posso definire le palle centrate aperte ogni volta che posso misurare una "distanza".

def. sia X, consideriamo

$$d : X \times X \to [0, +\infty[$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto d(x_1, x_2)$$

d si dice distanza se

1) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \ \wedge \ d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

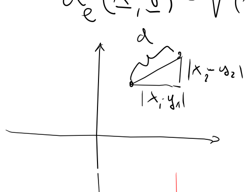
3) (dis. triangolare) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

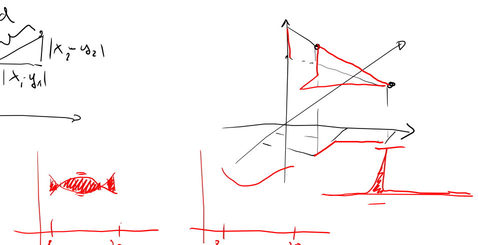
La coppia (X, d) si dice spazio metrico
(X: insieme, d: distanza su X)

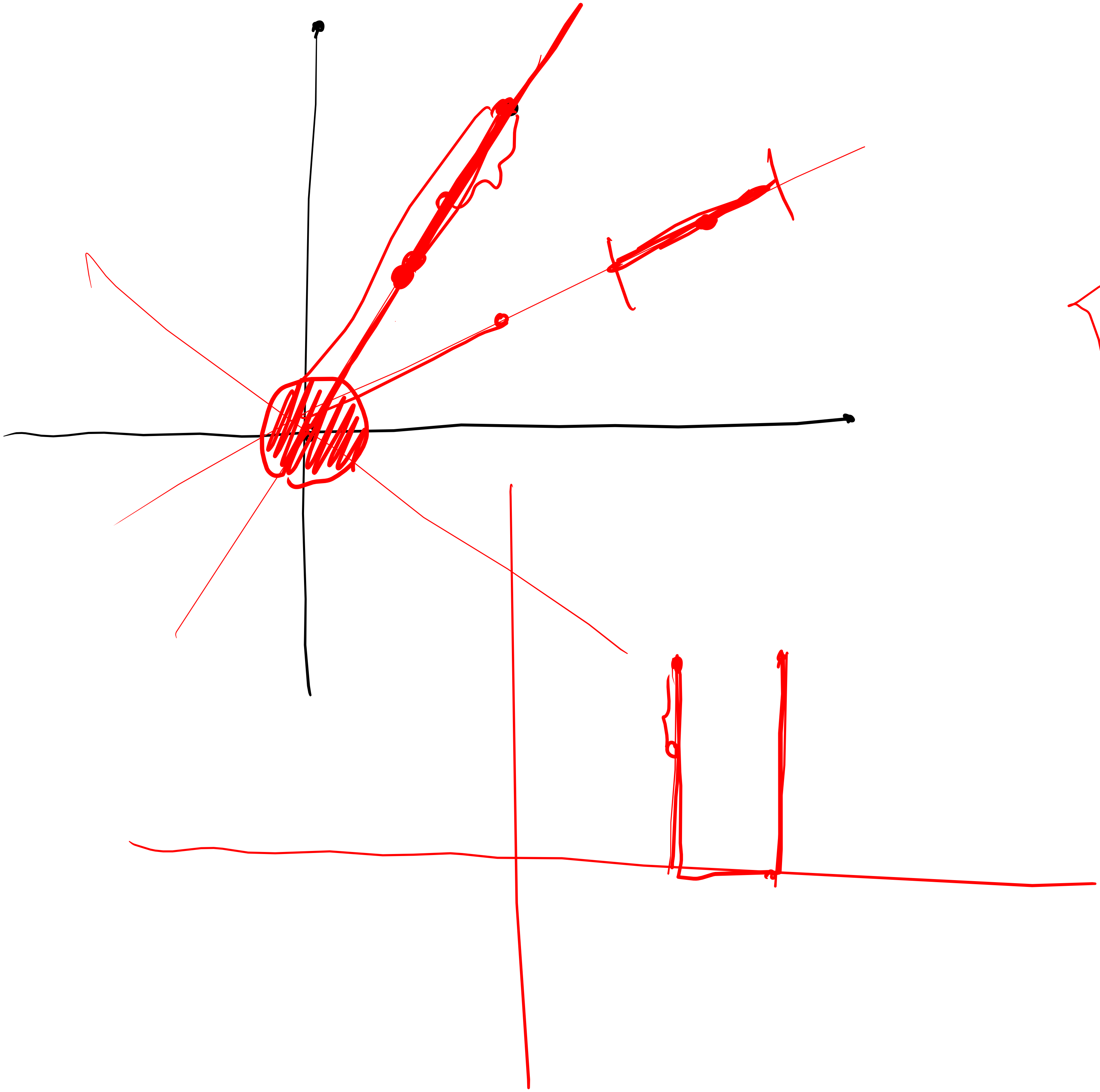
Vediamo che $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

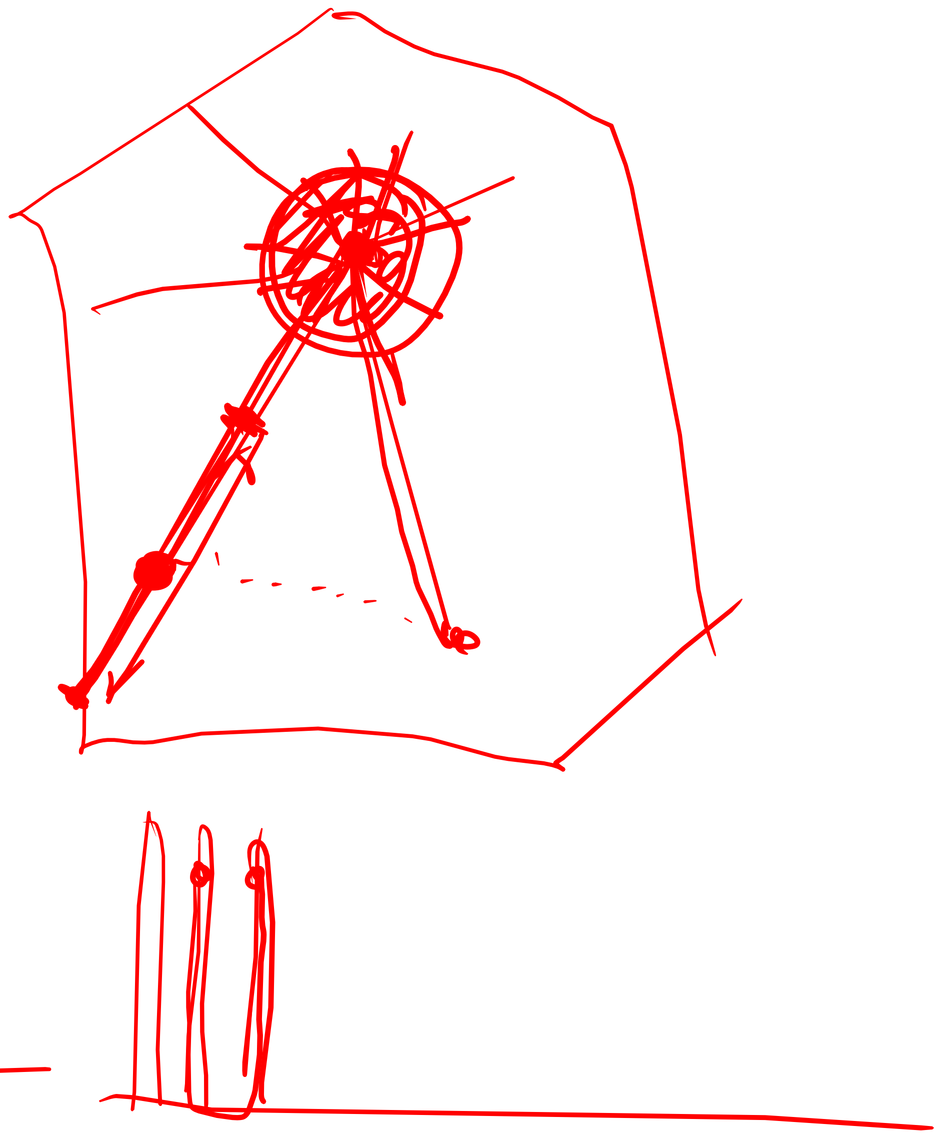
è uno spazio metrico se si considera

$$d_e(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$









def. $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$]x_0 - r, x_0 + r[$ è un intorno centrato aperto di x_0

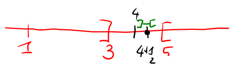
def. $x_0 \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$

U si dice <u>intorno</u> di x_0

se $\exists r > 0 : \ ]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq U$

U è intorno di x_0 se contiene un intorno centrato aperto di x_0

Esempio $\{1\} \cup]3, 5[$



questo è intorno di 4 ?

" " " $4{,}5 = 4 + \frac{1}{2}$

è intorno di 1 ? no

è intorno di 3 ? no

proviamo dire che è intorno di tutti i numeri reali in $]3, 5[$

def. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

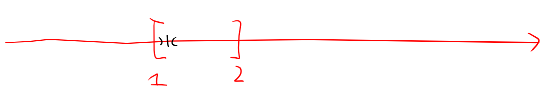
x_0 si dice <u>punto interno a E</u>

se E è un intorno di x_0.

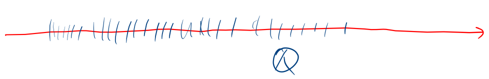
cioè se $\exists r > 0 : \ ]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq E$

Es. $E = [1, 2]$.

chi sono i pti interni ? $]1, 2[$



Es. $E = \mathbb{Q}$ chi sono i pti interni ? $\emptyset$



Es. $E = \mathbb{N}$ non ha punti interni.

def. l'unione dei pti interni si chiama l'interno di E, si indica con $\mathring{E}$

def. sia E insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$.

x_0 si dice <u>pto di frontiera</u> per E

se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E e pti del complementare di E.

cioè $\forall r > 0$, $]x_0 - r, x_0 + r[\cap E \neq \emptyset$

$\wedge$

$]x_0 - r, x_0 + r[\cap \complement E \neq \emptyset$

def. Sia E insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$.
x_0 si dice pto di frontiera per E

se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E

Esempi $E =]1, 2[$

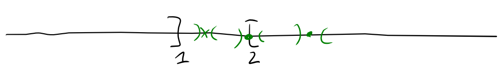
$]x_0 - r, x_0 + r[\cap \complement E \neq \emptyset$

l'insieme dei punti di frontiera lo diciamo frontiera di E, ∂E

Esempio $E =]1, 2[$

chi è $\mathring{E}$? chi è ∂E?

$\mathring{E} =]1, 2[$, $\partial E = \{1, 2\}$



se invece $E = [1, 2]$ $\mathring{E} =]1, 2[$

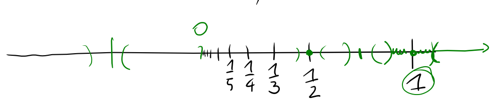
$\partial E = \{1, 2\}$

$r > 0$

$]0, r[$

$\frac{1}{n}$

Esempio $E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



$\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = E \cup \{0\}$

Esempio $E = \mathbb{Q}$ $\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = \mathbb{R}$

def. x_0 è esterno a E

se x_0 è interno al $\complement E$

osservazione. se $E \subseteq \mathbb{R}$

$\partial E = \partial(\complement E)$

def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

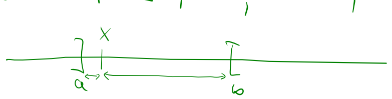
A si dice aperto se $\forall x_0 \in A$, $\exists r > 0$:

$]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$

A è aperto se e solo se tutti i punti di A sono punti interni ad A

A è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$

Esempio $A =]a, b[$, A è aperto.



se scelgo $r = \min\{x - a, b - x\}$

risulta $]x - r, x + r[\subseteq]a, b[$

Teorema

1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sono insiemi aperti

2) l'unione di un qualunque insieme di insiemi aperti è un insieme aperto

3) l'intersezione di un numero finito di aperti è un insieme aperto.

dim.

$\mathbb{R}$ è aperto. ($\forall x \in \mathbb{R}, \forall r>0 \quad]x-r, x+r[\subseteq \mathbb{R}$)

¿ $\emptyset$ è aperto? sì perché non ha elementi e quindi i suoi elementi hanno tutte le proprietà che vogliamo.

2) siano $\{A_i, i \in I\}$ una famiglia (insieme) di aperti contenuti in $\mathbb{R}$

consideriamo $\bigcup_{i \in I} A_i$

sia $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ Allora $\exists \bar{i}$ t.c. $x_0 \in A_{\bar{i}}$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists i \in I, x \in A_i\} \right)$$

$x_0 \in A_{\bar{i}}$ ma $A_{\bar{i}}$ è aperto allora $\exists r>0$: $]x_0-r, x_0+r[\subseteq A_{\bar{i}}$

ma allora $]x_0-r, x_0+r[\subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

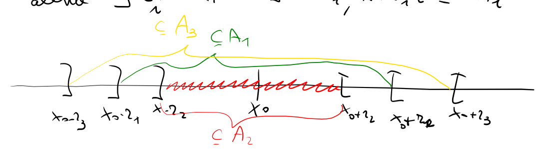
Allora $\bigcup A_i$ è aperto

3) Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ insiemi aperti

sia $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$

in particolare $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad x_0 \in A_i$

allora $\exists r_i$ t.c. $]x_0-r_i, x_0+r_i[\subseteq A_i$



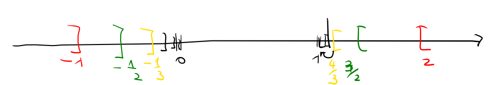
chiamo $\bar{r} = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ho $\bar{r}>0$

e ho $]x_0-\bar{r}, x_0+\bar{r}[\subseteq A_i \quad \forall i=1,\dots n$

allora $]x_0-\bar{r}, x_0+\bar{r}[\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

CVD

oss. considero $A_n =]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[\quad n=1,2,\dots$



$$\bigcap_n]-\tfrac{1}{n}, 1+\tfrac{1}{n}[= [0,1]$$

def. sia $C \subseteq \mathbb{R}$

C si dice chiuso se $\complement C$ è aperto.

def. Sia $C \subseteq \mathbb{R}$

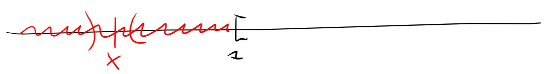
C si dice chiuso se $\complement C$ è aperto.

Esempio $[1,2]$

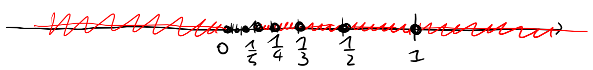
aperto aperto

$\complement([1,2]) =]-\infty, 1[\cup]2,+\infty[$

$]-\infty,1[= \{x\in\mathbb{R} : x<1\}$ è aperto



Es. $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$



E è chiuso! $\complement E =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup]\frac{1}{2},1[\cup]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[\cup \dots$

$=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup \bigcup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[$

Teo. 1) $\emptyset, \mathbb{R}$ sono chiusi

2) intersezione di insiemi chiusi (finita o infinita) è un chiuso

3) l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

per provare 2) e 3) uso De Morgan

Voglio provare che $\bigcap_{i\in I} C_i$ è chiuso, se C_i è chiuso $\forall i$.

Considero $\complement\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) \overset{\text{De Morgan}}{=} \bigcup_{i\in I} \complement(C_i)$

ma $\complement(C_i)$ è aperto $\forall i$

allora $\bigcup_i \complement(C_i)$ è aperta

allora $\complement\left(\bigcap_i C_i\right)$ è aperto

allora $\bigcap_i C_i$ è chiuso

CVD

Esercizio

provare che A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$

provare che C è chiuso se e solo se $\partial C \subseteq C$.

(controllo $\partial E = \emptyset \Leftrightarrow E = \mathbb{R} \vee E = \emptyset$.)