Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 4 - Spazi metrici e verifiche di continuità - 20/10/2025

SPAZI METRICI - ESERCIZI

Es.1

Si consideri $\mathbb{R}^N$ e sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Dimostrare che (usando disuguaglianza triangolare)

i) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$

e che (usando il punto i))

ii) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x + y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$ → "disuguaglianza triangolare inversa"

Es.2

Si consideri $\mathbb{R}^N$ e sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Dimostrare che

i) $\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall\, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$

ii) $\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \geq \|x_1\| - \|x_2\| - \|x_3\| - \dots - \|x_m\| \qquad \forall\, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$

↳ usare dis. triang. inversa per il punto ii).

Es.3

Consideriamo su $\mathbb{R}^N$ le tre distanze

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, \dots, N\}$$

EXTRA

↳ dimostrare che $d_\infty : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una distanza su $\mathbb{R}^N$

i) Dimostrare che $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq N \cdot d_\infty$

ii) Indichiamo con $B^1(x_0,r)$ la palla di raggio r e centro x_0 nella distanza d_1 e analogamente con $B^2(x_0,r)$ e $B^\infty(x_0,r)$ quelle nelle distanze d_2 e d_∞, rispettivamente. Dimostrare che

$$B^\infty\left(x_0,\frac{r}{N}\right) \subseteq B^1(x_0,r) \subseteq B^2(x_0,r) \subseteq B^\infty(x_0,r)$$

iii) Disegnare $B^1(0,1)$, $B^2(0,1)$, $B^\infty(0,1)$ in $\mathbb{R}$ $(N=1)$

iv) Disegnare $B^1((0,0),1)$, $B^2((0,0),1)$, $B^\infty\left((0,0),\frac{1}{2}\right)$, $B^\infty((0,0),1)$ in $\mathbb{R}^2$ $(N=2)$

CONTINUITÀ - RICHIAMO

- Siano (E,d_E) e (F,d_F) spazi metrici e sia $f: E \to F$. f è continua in $x_0 \in E$ se

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ d_E(x,x_0) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

oppure

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

oppure

ii) per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

- Se $E = F = \mathbb{R}$ e come distanza prendiamo $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$ allora la i) diventa

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

NOTA BENE

È implicitamente inteso che δ dipende, in generale, sia da x_0 che da ε. Inoltre, l'intorno $B(x_0,\delta)$ (o $|x-x_0|<\delta$) va eventualmente intersecato con il dominio di f.

$\hookrightarrow$ si veda Es. 2

CONTINUITÀ - ESERCIZI

Es. 4

i) Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 2$.

ii) Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es. 5

Dimostrare che $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è continua $\forall x \geq 0$.

Es. 6

Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non è continua in $x = 0$.

SOLUZIONI

Es. 1

i) Per definizione di valore assoluto, dobbiamo dimostrare che

$$-\|x-y\| \underset{b)}{\leq} \|x\|-\|y\| \underset{a)}{\leq} \|x-y\|.$$ Fissiamo due generici $x,y \in \mathbb{R}^N$.

a) $\|x\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo e} \\ \text{sottraggo } y}}{=} \|x-y+y\| = \|(x-y)+y\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dis. triang.}}}{\leq} \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$

b) In maniera analoga

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\|$$

$\Downarrow$ cambiamo segno invertendo il verso della disuguaglianza, e ricordiamo che $\|y-x\| = \|-(x-y)\| = \|x-y\|$

$$\|x\| - \|y\| \geq -\|x-y\|$$

fine dimostrazione $\rightarrow$ $\boxtimes$

ii) Basta applicare quanto dimostrato agli elementi x e $-y$, in quanto vale $\forall x,y \in \mathbb{R}^N$.

Ovvero, fissati 2 generici $x,y \in \mathbb{R}^N$, definiamo $\tilde{x} := x \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{y} := -y \in \mathbb{R}^N$ e applichiamo la disuguaglianza a $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$:

$$\big|\|\tilde{x}\| - \|\tilde{y}\|\big| \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \Rightarrow \big|\|x\| - \|-y\|\big| \leq \|x-(-y)\| \Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x+y\|$$

$\boxtimes$

Es. 2

i) Basta applicare più volte la dis. triangolare:

$$\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2 + x_3 + \dots + x_m\|$$

$$\leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3 + \dots + x_m\|$$

$$\leq \dots \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots + \|x_m\|$$

$\boxtimes$

[Volendo essere più rigorosi si può dimostrare per induzione la proposizione

$$P_m : \quad \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \qquad \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Passo iniziale: $m = 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{1} x_k \right\| = \|x_1\| = \sum_{k=1}^{1} \|x_k\|$$

- Passo induttivo: assumiamo vera P_m e dimostriamo P_{m+1}

$$\left\| \sum_{k=1}^{m+1} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k + x_{m+1} \right\| \underset{\text{dis. triang.}}{\leq} \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| + \|x_{m+1}\| \underset{P_m}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| + \|x_{m+1}\| = \sum_{k=1}^{m+1} \|x_k\|$$

$\boxtimes$]

ii) Applichiamo la i) con $x_1 = 0$ e cambiamo segno:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \|x_2 + \dots + x_m\| \leq \|x_2\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow -\|x_2 + \dots + x_m\| \geq -\|x_2\| - \dots - \|x_m\| \qquad (*)$$

Applichiamo la dis. triang. inversa a $x = x_1$ e $y = x_2 + \dots + x_m$

$$\|x + y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x_1 + x_2 + \dots + x_m\| \geq \|x_1\| - \|x_2 + \dots + x_m\|$$

$$\geq \|x_1\| - \|x_2\| - \dots - \|x_m\|$$

applichiamo la (*) ricavata prima

$\boxtimes$

Es. 3

i) a) $d_\infty \leq d_2$

Dimostriamo che $d_\infty^2 \leq d_2^2$, infatti $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(d_\infty(x,y))^2 = \left(\max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\}\right)^2 = \max\{|x_k - y_k|^2 : k = 1, \dots, m\}$$

$f(x) = x^2$ è strett. crescente per $x > 0$, dunque non altra l'ordine

$\to$ se $|x| \geq |y|$ allora $|x|^2 \geq |y|^2$, dunque $\max\{|x|, |y|\}^2 = \max\{|x|^2, |y|^2\}$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 = (d_2(x,y))^2$$

a destra sommo tutti i termini, compreso il max. di prima!

$\Rightarrow$ prendendo la radice quadrata $|d_\infty(x,y)| \leq |d_2(x,y)|$, ma le distanze non possono essere negative dunque $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

b) $d_2 \leq d_1$. Dimostriamo come prima che $d_2^2 \leq d_1^2$

$$(d_2(x,y))^2 = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2$$

$$(d_1(x,y))^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|\right)^2 =$$

$$= \left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \right)^2$$

$$= |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_N - y_N|^2 + 2|x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2| + \text{Tutti gli altri doppi prodotti}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le N} |x_i - y_i||x_j - y_j|}_{\ge 0} \ge \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 = (d_2(x,y))^2$$

c) $d_1 \le N \cdot d_\infty$, infatti:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k| \le \sum_{k=1}^{N} \max\{|x_j - y_j| : j = 1, \dots, N\} = N \cdot \max\{|x_j - y_j| : j = 1, \dots, N\} = N \cdot d_\infty(x,y)$$

l'indice j è muto, il valore del massimo non dipende dall'indice

ii) a) $B^\infty(x_0, \frac{r}{N}) \subseteq B^1(x_0, r)$

Per dimostrare che $A \subseteq B$ per 2 qualsiasi insiemi A e B, dobbiamo dimostrare che se $x \in A$ allora $x \in B$.

Quindi prendiamo $x \in B^\infty(x_0, \frac{r}{N})$, ovvero $d_\infty(x, x_0) < \frac{r}{N}$, ovvero $N \cdot d_\infty(x, x_0) < r$

Per il punto i c)

$\hookrightarrow d_1(x, x_0) < N \cdot d_\infty(x, x_0) < r \Rightarrow x \in B^1(x_0, r)$

b) $B^1(x_0, r) \subseteq B^2(x_0, r)$, si dimostra come prima perché $d_2 \le d_1$

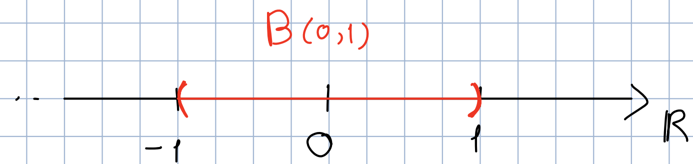
c) $B^2(x_0, r) \subseteq B^\infty(x_0, r)$, si dimostra come prima perché $d_\infty \le d_2$

$\boxtimes$

iii) $N = 1$

In questo caso tutte le distanze coincidono, infatti presi $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_1(x,y) = |x-y|$$



$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|^2} = |x-y|$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x-y|\} = |x-y|$$

Dunque $B^1(0,1) = B^2(0,1) = B^\infty(0,1) =: B(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : |x-0| < 1\} = (-1,1)$

iv) $N = 2$, prendiamo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_1 - y_1|^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

a) $B^1((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$

$$= \begin{cases} x_1 + x_2 < 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 < 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 < 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ -x_1 - x_2 < 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x_2 < 1 - x_1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_2 < 1 + x_1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ x_2 > x_1 - 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ x_2 > -x_1 - 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

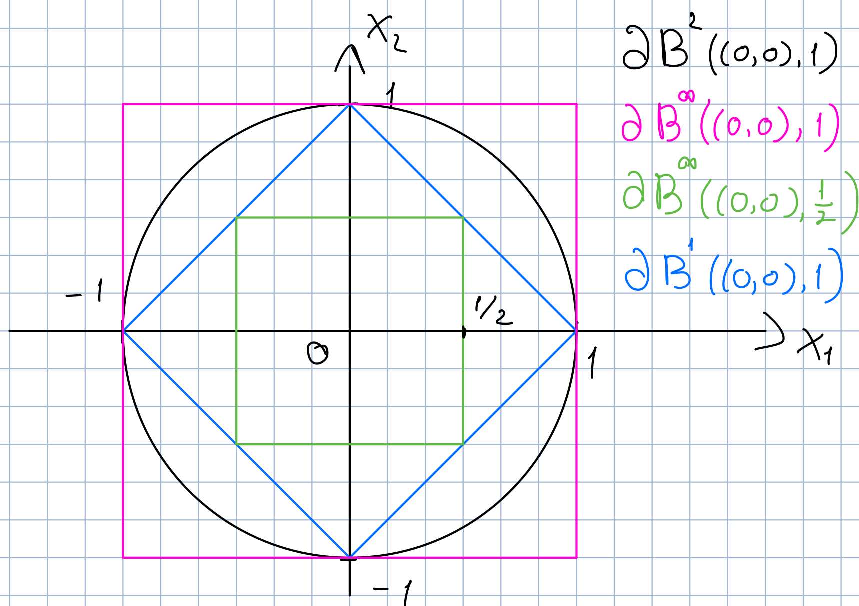
↳ area compresa tra queste rette!

b) $B^2((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} < 1\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ → cerchio centrato nell'origine e di raggio 1.

c) $B^\infty((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$

$= \{|x_1| < 1, |x_2| < 1\} = (-1,1) \times (-1,1)$ → quadrato di lato 2 centrato nell'origine

$$B^{\infty}((0,0), 1/2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



Nel disegno evidenziamo solo i bordi / frontiere degli insiemi per non creare confusione...

↳ ricordiamo però che i bordi sono esclusi dalle palle per definizione!

N.B.

Notiamo la catena di inclusioni dei punti precedenti!

Extra

Dimostriamo che d_∞ è effettivamente una distanza

a) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad (x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N))$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\} \geq 0$$ perché il valore assoluto di qualsiasi numero reale è ≥ 0.

b) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) = 0 \iff x = y$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\underbrace{|x_k - y_k|}_{\geq 0 \ \forall k} : k = 1, \dots, N\} = 0 \iff |x_k - y_k| = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$$

$$\iff x_k - y_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N \iff x_k = y_k \quad \forall k = 1, \dots, N$$

$$\iff x = y$$

c) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\} = \max\{|y_k - x_k| : k = 1, \dots, N\} = d_\infty(y,x)$$

d) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,z) \leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^N$

$$d_\infty(x,z) = \max\{|x_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$$= \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$|x_k - y_k + y_k - z_k|$
$\leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \quad \forall k$

$$\leq \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$\Rightarrow \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k|\}$
$\leq \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k|\}$

$$= \max\{|x_k - y_k| : k = 1,\dots,N\} + \max\{|y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$$= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$$

Es. 4 (a fine file una risoluzione alternativa del punto i) come fatta in aula)

i) Calcoliamo innanzitutto: $f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$. Inoltre $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$.

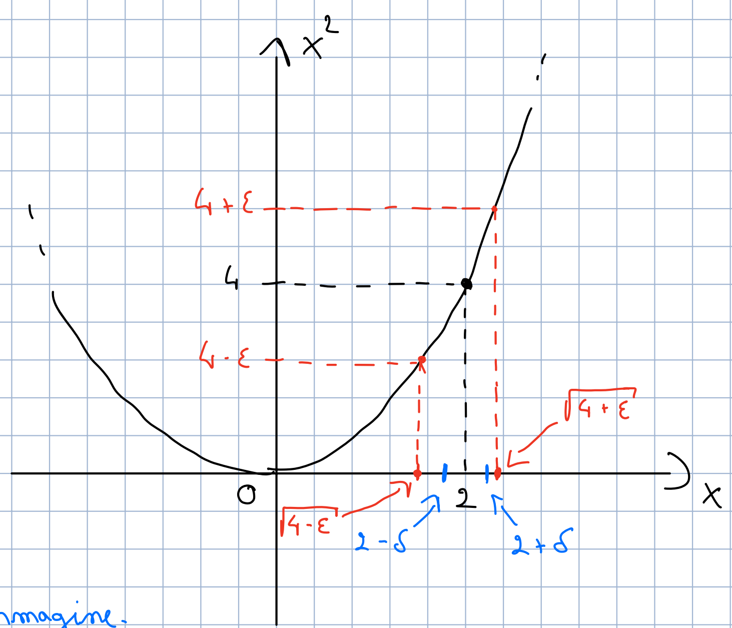
Dobbiamo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ovvero

se $|x-2| < \delta$ allora $|x^2 - 4| < \varepsilon$

Prima fissiamo un generico ε e individuiamo l'intervallo $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$, poi ne facciamo la controimmagine,

e infine prendiamo un δ (che in generale dipende dal punto x_0 e da ε!), tale che $[2-\delta, 2+\delta]$ sia dentro questa controimmagine.



$$|x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2| \underset{\text{dis. triang.}}{\leq} |x-2| \cdot (|x|+2)$$

Siccome $|x-2| < \delta$, allora per la dis. triang. inversa $|x| - 2 \leq |x-2| < \delta$

$\Rightarrow |x| \leq 2 + \delta$

$|a+b| \geq ||a|-|b|| \geq |a| - |b| \quad (a = x, b = -2)$

Quindi

$$|x^2 - 4| \leq \delta \cdot (2 + \delta + 2) = \delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon$$

cerchiamo i δ che soddisfino questa relazione!

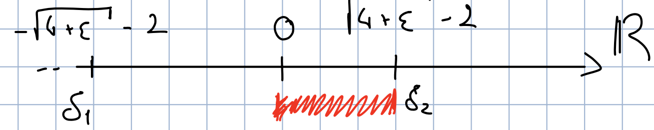
A questo punto dobbiamo dimostrare che per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ che soddisfa $\delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon$. Risolviamo quindi la disuguaglianza e determiniamo δ in funzione di ε.

$$\begin{cases} \delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon \\ \delta > 0 \end{cases}$$

$$\delta(\delta + 4) < \varepsilon$$

$$\delta^2 + 4\delta - \varepsilon < 0$$

$$\delta_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \varepsilon}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 < \delta < \delta_2 \\ \delta > 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ la continuità è verificata per $0 < \delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$

ii) Verifichiamo la continuità $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, procedendo esattamente allo stesso modo.

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0|(|x| + |x_0|)$$

Inoltre $|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| \leq |x_0| + \delta$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) < \varepsilon$$

imponiamo questo e troviamo δ

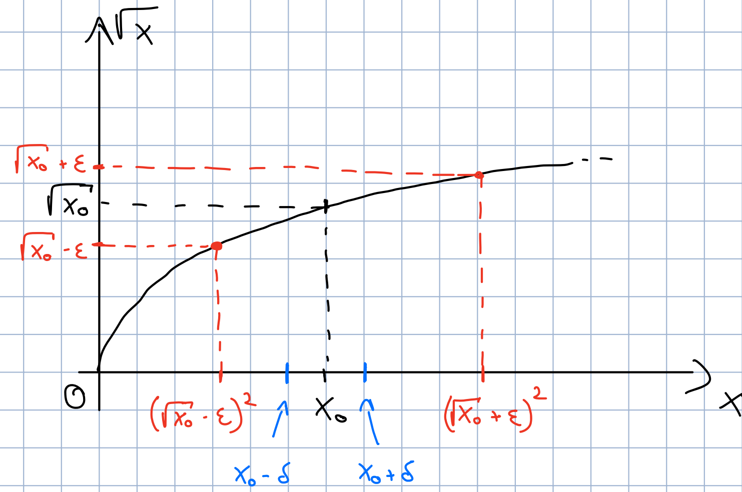
N.B. In generale conviene lavorare sulla differenza $|f(x) - f(x_0)|$ in modo da maggiorarla con $x - x_0$ o con una funzione di $x - x_0$, ed avere quindi una relazione tra δ e ε

$$\begin{cases} \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) < \varepsilon \\ \delta > 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{stessi conti di i)}) \Rightarrow$$

$\boxed{\text{la continuità è verificata per } 0 < \delta < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|}$

Es. 5

Notiamo subito che $\mathrm{dom}\, f = [0, +\infty)$.



graficamente (in modo informale, non rigoroso) diremmo

$x_0+\delta < (\sqrt{x_0}+\varepsilon)^2 = x_0 + 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$

$\Rightarrow \delta < 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$

Dobbiamo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \text{se } \underbrace{x \geq 0}_{x \in \mathrm{dom} f} \text{ soddisfa } |x - x_0| < \delta \text{ , allora } |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon .$$

Lavoriamo su $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ per maggiorarlo con una funzione di $x - x_0$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Quindi, tenendo conto che $\sqrt{x} \geq 0$ dunque $\sqrt{x}+\sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}}$

abbiamo

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

Fissato ora $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare $\delta > 0$ che soddisfi la continuità, ovvero tale che

$$\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

Basta quindi prendere $0 < \delta < \varepsilon\sqrt{x_0}$.

N.B.

Graficamente avevamo intuito che il δ più grande possibile era $\delta = 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$. Con i calcoli ne abbiamo trovato uno più piccolo, che quindi va bene lo stesso.

Notiamo però che se $x_0 = 0$ avremmo $0 < \delta < 0$ (o $0 < \delta \leq 0$ indifferentemente), quindi ovviamente non ammissibile. Dimostriamo a parte il caso $x_0 = 0$.

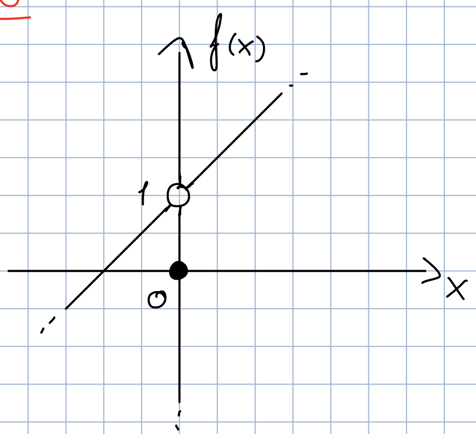
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : 0 < x < \delta \quad \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

ovvero $\sqrt{x} < \varepsilon$

$$\sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow x < \varepsilon^2$$

Basta dunque prendere $0 < \delta < \varepsilon^2$

Es. 6



Per dimostrare la non continuità, basta trovare un $\varepsilon > 0$ per cui, $\forall \delta > 0$ esiste un x che soddisfa $|x - x_0| < \delta$ ma per cui

$$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Per noi $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$.

Per $x \neq 0$ abbiamo

$$f(x) = x + 1 \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = |x + 1|$$

Prendiamo $\varepsilon \in (0, 1)$, ad esempio. Per qualsiasi $\delta > 0$ consideriamo l'intervallo $|x| < \delta$ (ovvero $-\delta < x < \delta$).

Basta prendere $x = \frac{\delta}{2}$ per avere:

$$\left|f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|\frac{\delta}{2} + 1\right| > 1 > \varepsilon$$

$\rightarrow$ ovvero per un qualsiasi $\varepsilon \in (0,1)$ abbiamo mostrato che $\forall \delta > 0 \ \exists x \in |x - x_0| < \delta$ che soddisfa $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Es. 4i

Dobbiamo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ allora $|x^2-4| < \varepsilon$

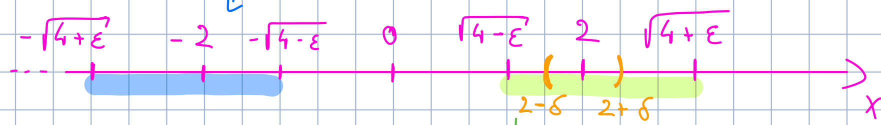
Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo di trovare un intorno di $x_0 = 2$ a partire da $|x^2-4| < \varepsilon$, ovvero cerchiamo di risolvere la disuguaglianza $|x^2-4| < \varepsilon$

$$|x^2-4| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon \iff \begin{cases} x^2-4 < \varepsilon \\ x^2-4 > -\varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 < 4+\varepsilon \\ x^2 > 4-\varepsilon \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \\ x < -\sqrt{4-\varepsilon} \;\vee\; x > \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases} \iff \underline{-\sqrt{4+\varepsilon} < x < -\sqrt{4-\varepsilon}} \;\vee\; \underline{\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}}$$

↳ intorno di -2, non ci interessa

intorno di 2



N.B. l'intorno non è simmetrico rispetto a 2, ne terremo conto per scegliere δ. Infatti graficamente vediamo che

$$\begin{cases} \sqrt{4-\varepsilon} < 2-\delta \\ 2+\delta < \sqrt{4+\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} \delta < 2-\sqrt{4-\varepsilon} \\ \delta < \sqrt{4+\varepsilon}-2 \end{cases}$$

Dunque l'intorno trovato è

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \iff \sqrt{4-\varepsilon}-2 < x-2 < \sqrt{4+\varepsilon}-2$$

$$\iff x-2 \in \left(\sqrt{4-\varepsilon}-2, \sqrt{4+\varepsilon}-2\right)$$

Per avere un intorno del tipo

$x-2 \in (-\delta, \delta)$, con $\delta > 0$,

basta prendere $0 < \delta < \min\left\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\right\}$