

Istituzioni di Algebra e Geometria

A.A. 2025/2026

Foglio di esercizi 2

Esercizio 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^2$, consideriamo la curva piana proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$x_0^4 + x_1^2 x_2^2 + x_0 x_1^3$$

Sempre in $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^2$, consideriamo la retta proiettiva ℓ parametrizzata da

$$\begin{cases} x_0 = 3\lambda + 2\mu \\ x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = 2\lambda - \mu \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{C} \cap \ell$.

Ora, sia K il campo finito con 4 elementi. Pensare a $\mathcal{C}$ e ℓ come curva e retta in $\mathbb{P}_K^2$ e calcolare $\mathcal{C} \cap \ell$.

Suggerimento: pensare a K come al quoziente $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$.

Ora, sia K il campo finito con 8 elementi. Pensare a $\mathcal{C}$ e ℓ come curva e retta in $\mathbb{P}_K^2$ e calcolare $\mathcal{C} \cap \ell$.

Suggerimento: pensare a K come al quoziente $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

Esercizio 2. Consideriamo il polinomio

$$F = x_0 x_1 + x_2^2$$

in $\mathbb{Z}_2[x_0, x_1, x_2]$.

- Calcolare $Z_p(F)$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_2}^2$ e verificare che $|Z_p(F)| = 3$.

- Posto $Z_p(F) = \{P_1, P_2, P_3\}$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ calcolare la retta ℓ_i che ha molteplicità di intersezione 2 in P_i con $\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$.
- Verificare che le rette ℓ_1, ℓ_2 ed ℓ_3 si intersecano nel punto $(0 : 0 : 1)$.

Esercizio 3. Usando la teoria del risultante, calcolare la molteplicità di intersezione delle curve proiettive in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ di equazioni

$$x_1^3 - x_0^2 x_2 = 0, \quad x_1^2 - x_0 x_2 = 0,$$

nel punto $(1 : 0 : 0)$.

Esercizio 4. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ le chiusure proiettive in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ delle curve affini di equazioni

$$y - x^3 = 0 \quad \text{e} \quad y - x^5 = 0.$$

Calcolare attraverso la teoria del risultante le loro intersezioni con le rispettive molteplicità di intersezione.