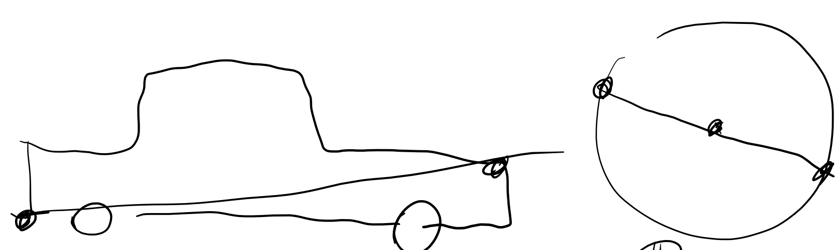
20 ottobre

Teorema (Bolzano Weierstrass) Dato una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed un punto $\bar{x}\in[a,b]$ con

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} .$$

<u>Osservazione</u> Il teorema continua ad essere vero quando sostituiamo $[a,b]$ con insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato:

Dato $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X $\exists$ $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e un $\bar{x}\in X$ t.c. $\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$.



Abbiamo anche visto che se $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0\in X$ f è continua in x_0 e $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione in X con $\lim_{k\to+\infty} z_k = x_0$, allora $\lim_{k\to+\infty} f(z_k) = f(x_0)$.

Teorema (Weierstrass)

Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono in $[a,b]$

x_M punto di massimo assoluto di f in $[a,b]$

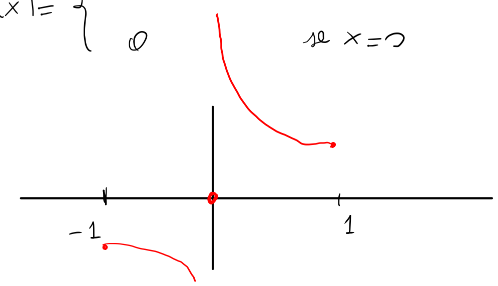
x_m - - - - minimo - - - - - - -

Esempi. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

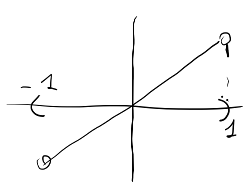
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Qui non esistono punti di massimo e di minimo.
Siccome f non è continua in 0 il teorema non si applica.

2) $(-1, 1)$ $\quad f(x) = x$

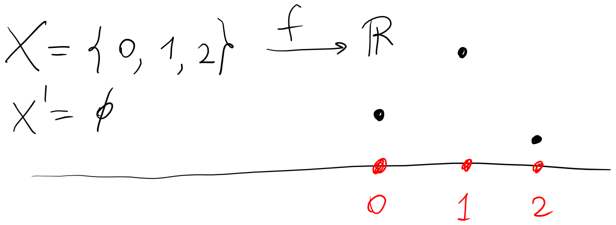


f in $(-1,1)$ non ha punti di minimo e massimo perché $(-1,1)$ non è un intervallo chiuso.

3) Se nel teorema sostituiamo $[a,b]$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ compatto, il teorema continua ad essere vero

4) $X = \{0, 1, 2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$X' = \emptyset$



1 è il punto di massimo assoluto

2 minimo.

Weierstrass

Teorema (Weierstrass)

Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono in $[a,b]$

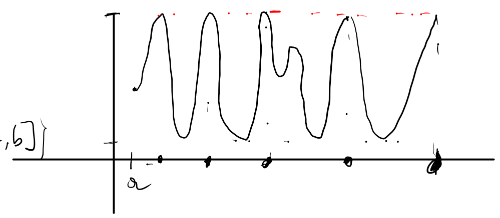
x_M punto di massimo assoluto di f in $[a,b]$

x_m - - - - - minimo - - - - - - -

Dim Non è restrittivo dimostrare solo l'esistenza di x_M.

Consideriamo

$f([a,b]) = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$



$f([a,b]) \subseteq \mathbb{R} \implies \exists \quad S = \sup f([a,b])$.

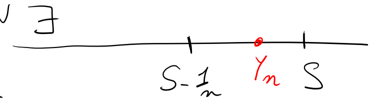
Supponiamo che $\exists$ una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $f([a,b])$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} y_n = S$.

Infatti, se $S \in f([a,b])$ possiamo scegliere come successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $f([a,b])$

basta prendere $y_n = S \quad \forall n$.

se $S \notin f([a,b])$. Se per esempio $S < +\infty$

allora $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists$



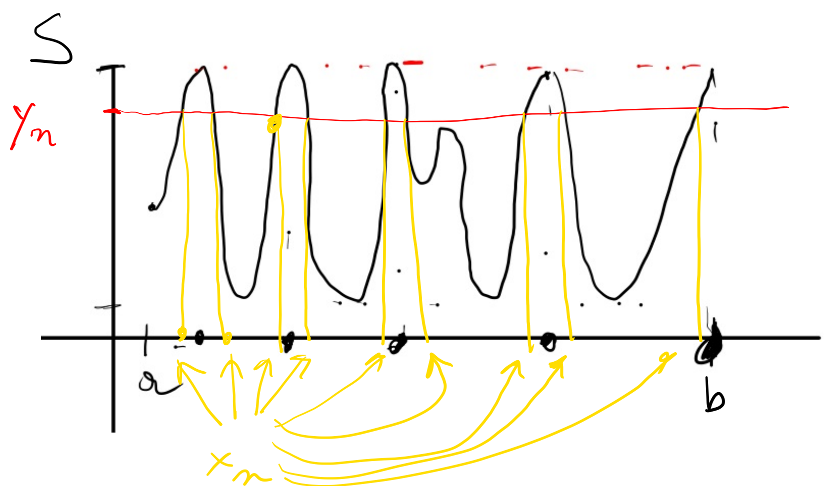
$\forall n$

so che $\boxed{\exists \quad y_n \in f([a,b]) \text{ t.c. } S - \frac{1}{n} < y_n \le S.}$ $*$

(perché se $*$ fosse falsa esisterebbe un n t.c. $\quad y \le S - \frac{1}{n} \quad \forall y \in f([a,b])$

e per la 2° proprietà di $\sup f([a,b]) = S$ avrei $\quad S \le S - \frac{1}{n} < S \quad$ assurdo).

$$\underbrace{S - \tfrac{1}{n}}_{\downarrow\, n \to +\infty \atop S} < y_n \le \underset{S}{\overset{\downarrow}{S}} \implies \lim_{n \to +\infty} y_n = S$$



Resta definita una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$

t.c. $y_n = f(x_n)$,

Il teorema di Bolzano - Weierstrass garantisce

che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

ed un punto $\bar{x}\in[a,b]$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

Ora verifico che $f(\bar{x}) = S$.

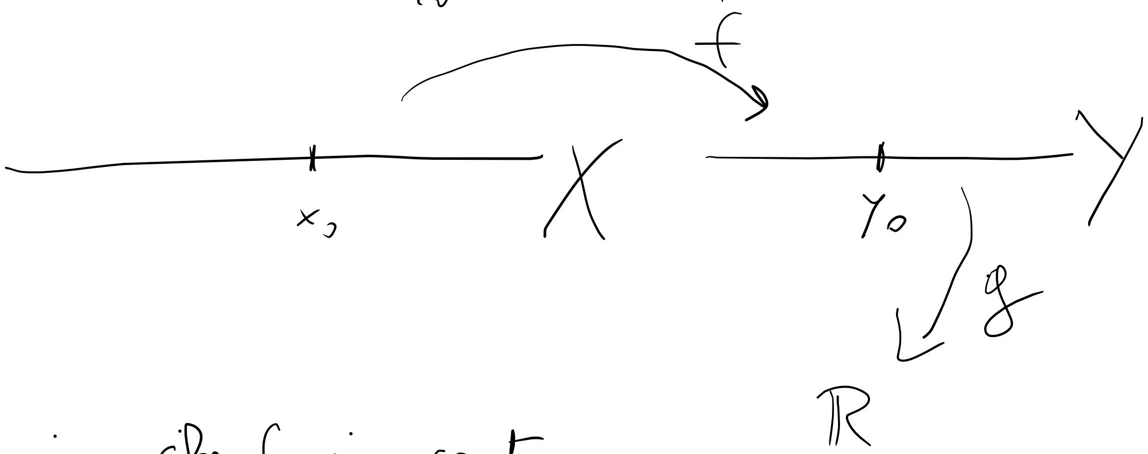
Per prima cosa $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n = \boxed{S}$

Per l'unicità del limite $f(\bar{x}) = S$. $x_{M_0} = \bar{x}$

Teor Siano X e Y sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0) \in Y$



Supponiamo che f sia continua in x_0 e g sia continua in y_0.

Allora la composizione $g(f(x)) = g \circ f(x)$

$X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

Esempi e^{x^2+x} è una composizione di

$g(y) = e^y$ e di $f(x) = x^2 + x$

$$e^{x^2+x} = e^{f(x)} = g(f(x))$$

Siccome g ed f sono continue in $\mathbb{R}$

anche $e^{x^2+x} \in C^0(\mathbb{R})$

Teor (continuità della funzione inversa) Siano I e J due intervalli e sia $f: I \to J$ strettamente monotona, continua in I e t.c. $f(I) = J$.
Allora la sua funzione inversa $g: J \to I$ è strettamente monotona (g crescente $\Leftrightarrow$ f crescente) e continua in J.

Esempi 1) $\sin(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è strettamente crescente e $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è
è in $C^0([-1, 1])$

2) $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è biettiva l'inversa

$$\underbrace{\{e^x : x \in \mathbb{R}\}}_{\text{è un intervallo}} \subseteq \mathbb{R}_+$$

$$+\infty = \lim_{x \to +\infty} e^x = \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$$

$$0 = \lim_{x \to -\infty} e^x = \inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \qquad y = -x$$

$$= \lim_{y \to +\infty} e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$J := \{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ è un intervallo
con $\sup J = +\infty$ $\inf J = 0$

$$J < \begin{matrix} (0, +\infty) = \mathbb{R}_+ \\ \cancel{[0, +\infty)} \end{matrix}$$

$e^{x_0} = 0 \Rightarrow$ per $x < x_0$
$0 \le e^x < e^{x_0} = 0$

La funzione inversa è $\lg x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

3) $x \in \mathbb{R}_+$ e per $a \in \mathbb{R}$ fissato definiamo

$$x^a \in C^0(\mathbb{R}_+)$$

$$x^a = e^{\lg(x^a)} = \qquad \left(y = e^{\lg y} \right)$$

$$= e^{a \lg x}$$

Quindi $x^a = g(f(x))$ dove
$f(x) = a \lg x \in C^0(\mathbb{R}_+)$
$g(y) = e^y \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow x^a = g \circ f(x)$
è in $C^0(\mathbb{R}_+)$.