

Funzioni Circolari e Trigonometriche

Fabio Vlacchi

MIGe Università Trieste

15 ottobre 2025

In sintesi

Le funzioni circolari sono strumenti fondamentali per descrivere:

- Relazioni geometriche tra angoli e lati
- Fenomeni ciclici e oscillatori

Cos'è una funzione circolare

- Le **funzioni circolari** derivano dallo studio del moto uniforme sulla circonferenza unitaria.
- Associano a ogni angolo θ un punto sulla circonferenza di raggio 1.
- Le coordinate del punto $P_\vartheta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ definiscono le funzioni fondamentali:

$$\sin \vartheta \quad \text{e} \quad \cos \vartheta$$

<https://www.youtube.com/watch?v=Q55T6LeTvSA>

Definizioni

$$\sin \vartheta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}, \quad \cos \vartheta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Periodo: 2π , ossia $\sin \vartheta = \sin(\vartheta + 2\pi)$ e $\cos \vartheta = \cos(\vartheta + 2\pi) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$
- Valori compresi tra $[-1, 1]$

Tangente e Cotangente

$$\operatorname{tg}(\vartheta) = \tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad \cot \vartheta = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

- $\tan \theta$ ha periodo π
- Non definite per valori in cui il denominatore è 0

Identità Fondamentale

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

- Base di molte trasformazioni trigonometriche
- Deriva direttamente dalla definizione sulla circonferenza unitaria

$$1 + \tan^2 \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

$$1 + \cot^2 \vartheta = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

- Le funzioni trigonometriche sono periodiche e simmetriche, ossia
$$\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \text{ (sin funzione *dispari*)}$$
$$\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \text{ (cos funzione *pari*)}$$
$$\tan(-\vartheta) = -\tan \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \text{ (tan funzione *dispari*).$$

Relazioni fondamentali

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

$$1 + \tan^2 \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$$

$$1 + \cot^2 \vartheta = \frac{1}{\sin^2 \vartheta}$$

Formule di somma e differenza

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Formule di bisezione

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Formule di Prostaferesi

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Applicazioni delle funzioni trigonometriche

- Studio di fenomeni periodici (onde, oscillazioni, suono, corrente alternata)
- Analisi di vettori e forze in fisica
- Calcolo di angoli e distanze
- Coordinate polari