Lezione 13 – 20/10/2025

Topologia di $\mathbb{R}$

- intorno centrato aperto di $x_0 \in \mathbb{R}$, I, $\exists r>0 : I =]x_0-r, x_0+r[$
- intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, U, $\exists r>0 : U \supseteq]x_0-r, x_0+r[$
- x_0 punto interno a $E \subseteq \mathbb{R}$, $\exists r>0 :]x_0-r, x_0+r[\subseteq E$

  ($x_0 \in \mathbb{R}$)

  quindi x_0 interno a E $\Updownarrow$ E è un intorno di x_0

  l'interno di A: $\mathring{E} = \{$pti interni$\}$

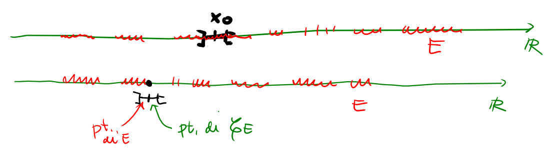
- $x_0 \in \mathbb{R}$, punto esterno a $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 è interno a $\complement E$
- $x_0 \in \mathbb{R}$, punto di frontiera per E

  $\forall r>0$, $]x_0-r, x_0+r[\cap E \neq \emptyset$

  $\wedge$

  $]x_0-r, x_0+r[\cap \complement E \neq \emptyset$

  la frontiera di E: $\partial E = \{$pti di frontiera$\}$



- $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice aperto se

  $\forall x \in A$, $\exists r>0 :]x-r, x+r[\subseteq A$

  quindi A è aperto se e solo se tutti i suoi punti sono punti interni a A

  quindi A è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$

- proprietà degli aperti
- $C \subseteq \mathbb{R}$, C si dice chiuso se $\complement C$ è aperto.
- proprietà dei chiusi

~O~

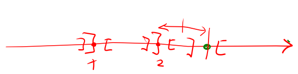
def. Sia E insieme in $\mathbb{R}$, sia $x_0 \in E$.
x_0 si dice <u>punto di chiusura</u> (o anche punto aderente) per E, se $\forall r>0$, $]x_0-r, x_0+r[\cap E \neq \emptyset$

x_0 è di chiusura per E se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E

l'insieme dei pti di chiusura lo indico con $\overline{E}$ e lo chiamo "la chiusura di E".

oss $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$

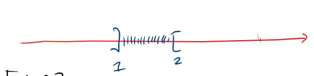
Esempi 1) $E =]1,2]$



$\overline{E} = [1,2]$

$\mathring{E} =]1,2[$ $\quad \partial E = \{1,2\}$

2) $E =]1,2[\cap \mathbb{Q}$

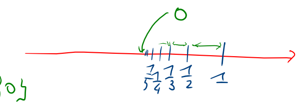


$\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = [1,2]$

$\overline{E} = [1,2]$ $\quad (\emptyset \subseteq]1,2[\cap \mathbb{Q} \subseteq [1,2])$

3) $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

3) $E = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$



$\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = E \cup \{0\}$

$\overline{E} = \partial E = E\cup\{0\}$.

questo insieme è chiuso?

$$\complement(E\cup\{0\}) = \underbrace{]-\infty,0[\ \cup\ ]1,+\infty[\ \cup\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[\right)}_{\text{è aperto}}$$

sì

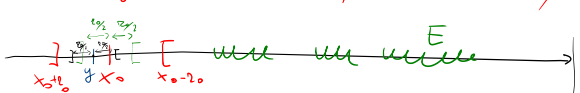
sto considerando la relazione $\subseteq$

Teorema: sia $E\subseteq \mathbb{R}$.
Allora $\overline{E}$ è un insieme chiuso
anzi $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso che contiene E

dim.
devo provare che $\overline{E}$ è un chiuso.
cioè devo provare che $\complement(\overline{E})$ è aperto

prendo $x_0\in\complement(\overline{E})$
se riesco a provare che $\exists r>0$ t.c. $]x_0-r,x_0+r[\ \subseteq\complement(\overline{E})$ ho finito

$\boxed{x_0\in\complement(\overline{E})}$
quindi
$x\notin\overline{E}$
quindi $\exists r_0>0$ t.c. $]x_0-r_0, x_0+r_0[\ \cap E=\emptyset$

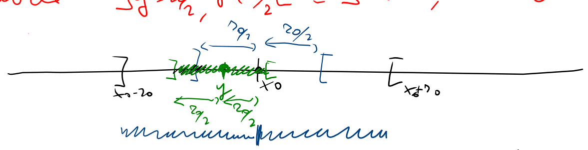


considero $]x_0-\frac{r_0}{2}, x_0+\frac{r_0}{2}[$

considero $y\in\ ]x_0-\frac{r_0}{2}, x_0+\frac{r_0}{2}[$

considero $]y-\frac{r_0}{2}, y+\frac{r_0}{2}[$

ho che $]y-\frac{r_0}{2}, y+\frac{r_0}{2}[\ \subseteq\ ]x_0-r_0, x_0+r_0[$



ma allora $]y-\frac{r_0}{2}, y+\frac{r_0}{2}[\ \cap E=\emptyset$

allora $y\in\complement(\overline{E})$

ma allora questo vale per tutti gli $y\in\ ]x_0-\frac{r_0}{2}, x_0+\frac{r_0}{2}[$

quindi $]x_0-\frac{r_0}{2}, x_0+\frac{r_0}{2}[\ \subseteq\complement(\overline{E})$

riassunto
ho preso $x_0\in\complement(\overline{E})$
e ho visto che $]x_0-\frac{r_0}{2}, x_0+\frac{r_0}{2}[\ \subseteq\complement(\overline{E})$

quindi $\complement(\overline{E})$ è aperto: OK

per provare che $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso che contiene E

Per provare che $\overline{E}$ è il più piccolo chiuso che contiene E

Sia K un chiuso con $K \supseteq E$

devo far vedere che $K \supseteq \overline{E}$

questo è equivalente $\complement(\overline{E}) \supseteq \complement K$

prendo $x_0 \in \complement K$ ma K è chiuso e allora $\complement K$ è aperto

$\complement K$ è aperto quindi

$\exists r>0 : \ ]x_0-r, x_0+r[\ \subseteq \complement K$

ma allora $]x_0-r, x_0+r[\ \cap K = \emptyset$

ma $K \supseteq E$ allora $]x_0-r, x_0+r[\ \cap E = \emptyset$

ma allora $x_0 \notin \overline{E}$

$x_0 \in \complement(\overline{E})$

riassunto se $x_0 \in \complement(K)$ allora $x_0 \in \complement(\overline{E})$

$\complement(K) \subseteq \complement(\overline{E})$

cioè $K \supseteq \overline{E}$

CVD

Oss. con ragionamenti analoghi si può provare che dato $E \subseteq \mathbb{R}$

$\mathring{E}$ è aperto

anzi è il più grande aperto contenuto in E

$$\boxed{\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}}$$

Oss. $x_0 \in \overline{E}$ quando $\forall r$ $]x_0-r, x_0+r[\ \cap E \neq \emptyset$

$x_0 \in \partial E$ quando $\forall r$ $]x_0-r, x_0+r[\ \cap E \neq \emptyset$

$]x_0-r, x_0+r[\ \cap \complement E \neq \emptyset$

quindi $\partial E \subseteq \overline{E}$, $\partial E \subseteq \overline{\complement(E)}$

anzi $\boxed{\partial E = \overline{E} \cap \overline{\complement(E)}}$

$\Downarrow$

∂E è un chiuso. (è intersezione di 2 chiusi)

Esempi

- E è chiuso se e solo se $\partial E \subseteq E$
- E è aperto se e solo se $E \cap \partial E = \emptyset$
- $\overline{E} = E \cup \partial E$
- $\mathring{E} = E \setminus \partial E$

Sia E chiuso. Allora $E = \overline{E}$

sia $x_0 \in \partial E$ allora $x_0 \in \overline{E}$ allora $x_0 \in E$

quindi E chiuso $\Rightarrow \partial E \subseteq E$

Sia E chiuso. Allora $E = \overline{E}$

sia $x_0 \in \partial E$ allora $x_0 \in \overline{E}$ allora $x_0 \in E$

quindi E chiuso $\Rightarrow \partial E \subseteq E$

viceversa

supponiamo $\partial E \subseteq E$

sia $x_0 \notin E$ $\Longleftrightarrow x_0 \in \complement E$

allora $x_0 \notin \partial E$

$$\neg \left(\forall r>0 : \ ]x_0-r, x_0+r[\cap E \neq \emptyset \ \wedge \ ]x_0-r, x_0+r[\cap \complement E \neq \emptyset \right)$$

cioè $\exists r>0 :$ $]x_0-r, x_0+r[\cap E = \emptyset$ $\vee$ $\underbrace{]x_0-r, x_0+r[\cap \complement E = \emptyset}_{\text{questo non è possibile}}$

quindi $\exists r>0 :$ $]x_0-r, x_0+r[\cap E = \emptyset$

$\Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\complement(E)}}$

riassunto

ho preso $x_0 \in \complement E$ e ho visto che $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\complement E}}$

significa che $\complement E$ è aperto cioè E è chiuso.

Punti di accumulazione (Cluster points)

def. sia $E \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 si dice di accumulazione per E

se $\forall r>0$, $(]x_0-r, x_0+r[\cap E) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

cioè x_0 è di accumulazione per E

se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di E

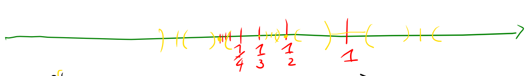
diversi da x_0

oss. i punti di accumulazione sono punti di chiusura

(ma ci saranno punti di chiusura che non sono punti di accumulazione)

Es. $E = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

cerchiamo i pti di accumulazione.



l'unico punto di accumulazione è 0

$\overline{E} = \{0\} \cup E = \{0\} \cup \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

def. un punto di E che non è di accumulazione per E si dice punto isolato.

def l'insieme dei punti di accumulazione si dice il "derivato dell'insieme"

$\mathcal{D} E$

TEOR. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 è di accumulazione per E

se e solo se

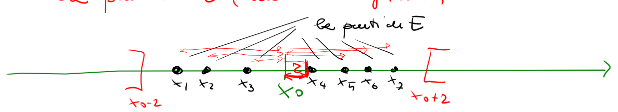
in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E.

Teor. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$
sia $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 è di accumulazione per E
se e solo se
in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti punti di E.

dim. Supponiamo che in ogni intorno di x_0 ci siano infiniti punti di E.
In particolare in ogni intorno di x_0 ci sono 2 punti di E
uno dei 2 è diverso da x_0
allora x_0 è di accumulazione

Per assurdo x_0 sia di accumulazione per E
ma esista un intorno di x_0 in cui ci sono solo k punti di E (un numero finito)



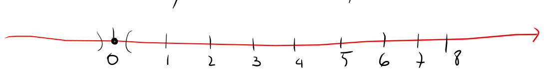
possiamo supporre che $x_1, x_2, \dots, x_k$ siano $\neq x_0$

considero $r = \min\{|x_0 - x_i|,\ i = 1,2,\dots,k\}$
siccome sono in numero finito, $r > 0$

allora in $]x_0 - r, x_0 + r[$ non ci sono punti di E diversi da x_0.

CVD

Esempi. 1) $E = \mathbb{N}$
$\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = \mathbb{N}$, $\overline{E} = \mathbb{N}$



$\mathcal{D}E = \emptyset$

2) $E =]1,2[$
$\mathring{E} =]1,2[$, $\partial E = \{1,2\}$, $\overline{E} = [1,2]$
$\mathcal{D}E = [1,2]$

3) $E = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n,m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
$\mathring{E} = \emptyset$, $\partial E = E \cup \{0\}$?! ci pensiamo
$\overset{!}{=} \overline{E}$

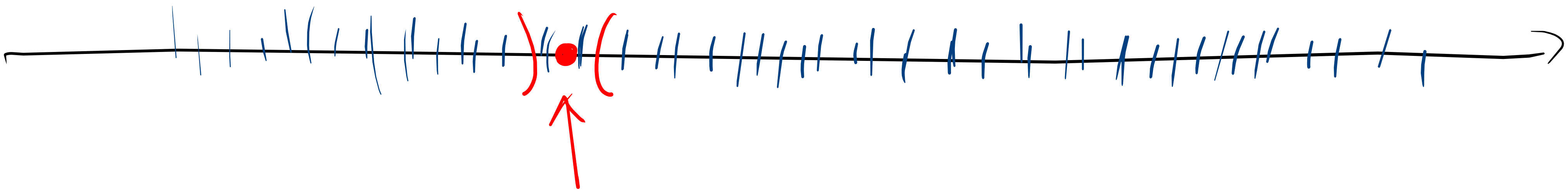
$\mathcal{D}E$?

Problema: se E è un insieme finito può avere punti di accumulazione? NO

quindi se voglio punti di accumulazione devo avere un insieme infinito.
Se E è un insieme infinito, ci sono sempre punti di accumulazione?

Problema: un insieme infinito e limitato ha punti di accumulazione?

$E = \mathbb{Q}$



$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Teorema (1° teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS)

Sia E infinito e limitato.
Allora esiste in $\mathbb{R}$ almeno un punto di accumulazione