

Il Prodotto Scalare Euclideo e le sue Applicazioni

Fabio Vlacchi

20 ottobre 2025

Definizione di Prodotto Scalare Euclideo

Siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ due vettori:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

Il **prodotto scalare euclideo** è definito come:

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^N u_i v_i$$

Esempio: In $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 2$$

Proprietà del Prodotto Scalare

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Commutatività:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Distributività:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- **Associatività rispetto a scalari:** $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- **Prodotto con sé stesso:** $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2 \geq 0$

$\|\vec{u}\|$ è detta *norma* o *modulo* di $\vec{u}$.

Angolo tra due vettori

Il prodotto scalare è legato all'angolo ϑ tra i due vettori $\vec{u}$ $\vec{v}$ nel seguente modo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \vartheta$$

da cui (se $\vec{u}$ $\vec{v}$ non sono nulli)

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Angolo tra due vettori

Il prodotto scalare è legato all'angolo ϑ tra i due vettori $\vec{u}$ $\vec{v}$ nel seguente modo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \vartheta$$

da cui (se $\vec{u}$ $\vec{v}$ non sono nulli)

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono **ortogonali** se e solo se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono ortogonali perché:

$$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$$

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Presi $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ due vettori *non paralleli* in $\mathbb{R}^3$, poniamo

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \quad (\text{prodotto vettore di } \vec{u} \text{ e } \vec{v})$$

il vettore di direzione ortogonale al piano contenente $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e orientato in modo che la terna $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ sia orientata positivamente e con modulo $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \vartheta$ essendo ϑ l'angolo compreso tra i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Comunque presi $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
risulta

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Comunque presi $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
risulta

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Comunque presi $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
risulta

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Comunque presi $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
risulta

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Per definizione poi

$$\langle \vec{u} | \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{v} | \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle$$

Proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Infine se $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_3 u_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$