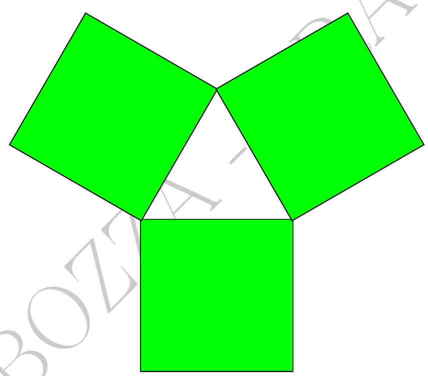
2 Ripasso di Geometria Euclidea Elementare

2.1 Perché questo corso ha 1 ora di Geometria?

Per lo studio della Geometria sono
– motivi formativi/astratti
– motivi pratici.

Problema. In figura si vedono dall'alto 3 cubi uguali appoggiati su un piano orizzontale. Si appoggi un quarto cubo uguale sul buco fra i 3 cubi in modo che un suo vertice vada quanto più in basso possibile. È difficilissimo immaginare la figura costituita dai 4 cubi! Che forma ha vista dall'alto? Cioè, ci chiediamo come si modifica la figura verde qua sotto, quando verrà aggiunto il quarto cubo.



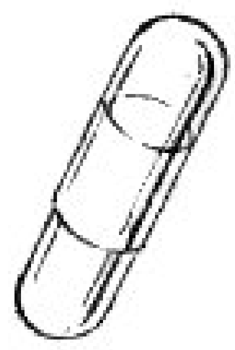
Come mostra il soprastante esempio, la geometria elementare ci fa raggiungere subito i limiti della nostra potenza mentale, facendoci fare un salutare bagno di umiltà.

Questo è un motivo formativo/astratto per lo studio della geometria, e alla fine della Lezione ne vedremo vari altri.

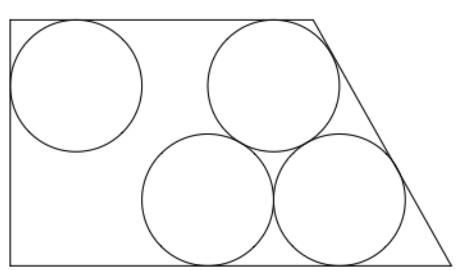
Adesso però vediamo alcuni motivi pratici, direttamente utili per le Scienze della Farmacia.

2.2 Questioni pratiche affrontate dalla Geometria

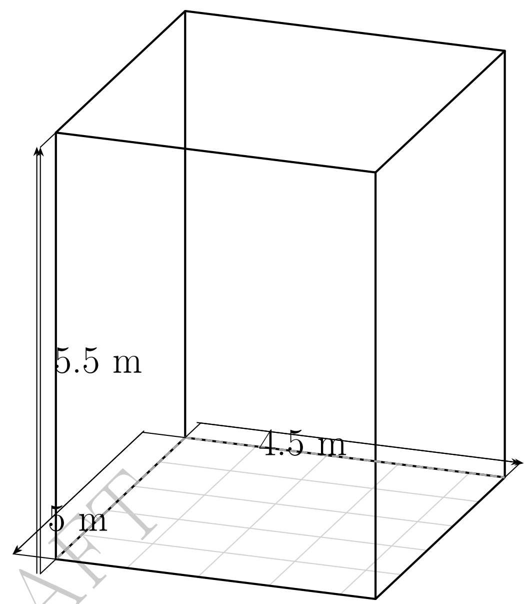
Impareremo a calcolare il volume utile di una capsula (“pillola") modellizzata con un cilindro e 2 semisfere.



Potremo calcolare anche, fra le altre cose:
– il volume di compresse ellissoidali;
– l'area di cerotti rotondi e rettangolari;
– il volume di un vaso sanguigno, modellizzato con un cilindro;
e, almeno in casi semplici oppure approssimativamente, anche:
– l'area della nostra farmacia
— e il numero di clienti ospitabili, se dipendente dall'area;
– il volume della nostra farmacia e del suo magazzino
— e il numero max di lavoranti là: per legge dipende dal volume;
– il volume di provette, siringhe, matracci, serbatoi...
e tante altre cose.



Problema da semplice a difficile
Supponiamo che per un'epidemia si debba tracciare sul pavimento della nostra bella farmacia circoli di raggio 1 m, uno per cliente ospitabile. Quanti se ne potranno fare, e in quali posizioni?
A seconda della forma dello spazio utile (diciamo: davanti al bancone), il problema può essere da semplice a difficilissimo.
E fa una bella differenza poter ospitare 4 clienti oppure, ottimizzando le posizioni dei circoli, 5 o magari addirittura 6 clienti.



Esempio.
Il reparto produttivo della nostra azienda che produce filo interdentale ha una pianta rettangolare di 5 m × 4.5 m e un'altezza di 5.5 m. Considerando che la legge italiane richiede 2 m^2 e 10 m^3 per ogni lavoratore (per le farmacie e laboratori galenici ci sono alcune prescrizioni ulteriori) quante persone possono lavorare contemporaneamente nella sala?

RICORDIAMO DALLE SCUOLE MEDIE

Area del rettangolo di lati a e b: a x b
Volume del parallelepipedo di lati a e b e c: a x b x c
ovvero: area di base x altezza

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

Area del reparto produttivo: $A = 5 \cdot 4.5 = 22.5$ m^2
Volume del reparto produttivo: $V = 22.5 \cdot 5.5 = 123.75$ m^3
In base all'area, dividendo 22.5 per 2: al massimo 11.25 e quindi 11 persone.
In base al volume, dividendo 123.75 per 10: al massimo 12.375 e quindi 12 persone.

2.3 Geometria, ovunque!

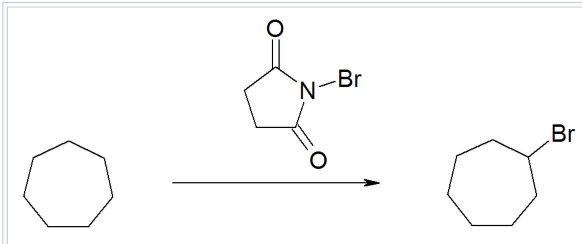
La presenza di forme geometriche nella Scienza e nella Tecnologia è molto pervasiva.
Scrive Galileo Galilei, uno dei fondatori della Scienza moderna:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.
> (https://it.wikiquote.org/wiki/Galileo_Galilei)

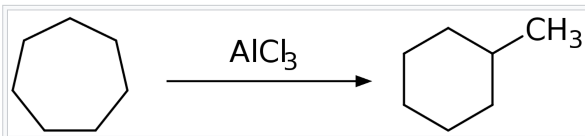
Questa profonda osservazione scritta nel XVII secolo si è rivelata vera anche per innumerevoli scoperte scientifiche successive: ovunque nella Scienza ricorrono segmenti, triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ettagoni, sfere...
In figura la *formula di struttura* del *cicloeptano*, usato nella produzione di farmaci (fotografia da Wikipedia, l'enciclopedia libera), e dell'Aspirina (acido acetilsalicilico), il più antico farmaco (1897) non già esistente in natura (fotografia da WolframAlpha), che tanto buoni risultati sta dando nella terapia del covid-19:

> The results showed that aspirin use was associated with a reduction in COVID-19 mortality (adjusted RR 0.69 (...))[1] https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC9217117/

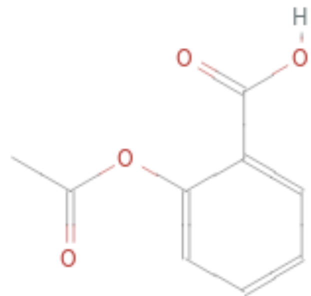
[1] Ma S, Su W, Sun C, Lowe S, Zhou Z, Liu H, Qu G, Xia W, Xie P, Wu B, Gao J, Feng L, Sun Y. Does aspirin have an effect on risk of death in patients with COVID-19? A meta-analysis. Eur J Clin Pharmacol. 2022 Sep;78(9):1403-1420. doi: 10.1007/s00228-022-03356-5. Epub 2022 Jun 22. PMID: 35732963; PMCID: PMC9217117.

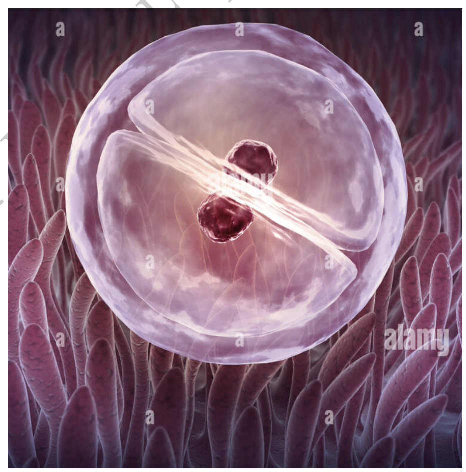


Bromurazione del cicloeptano



Sintesi del metilcicloesano



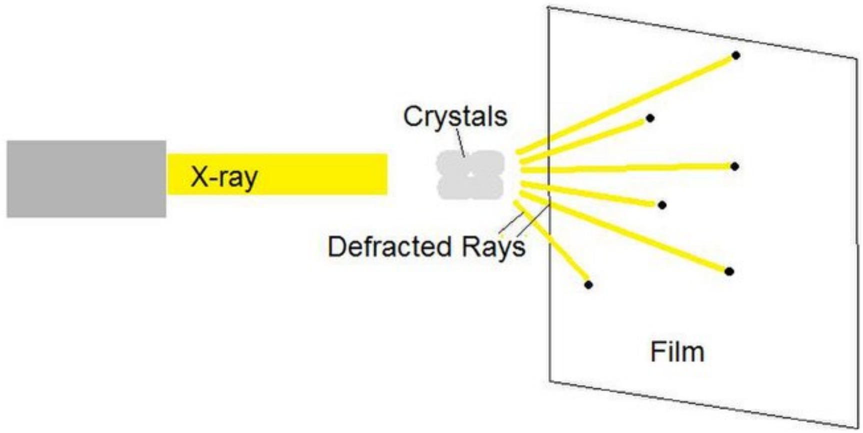


L'approssimativa sfericità della Terra era ben nota al tempo di Galileo Galilei, lo zigote umano è stato scoperto molto dopo.

Si potrebbe obiettare che il corpo della persona adulta non ha più la forma di una sfera, nè è diventato un cilindro o un cono. Ma nonostante la sua forma più complessa, gli si applicano i concetti che vengono elaborati per le figure elementari, come

– <u>distanza</u> fra una sorgente di raggi X e un organo
– <u>area</u> della superficie corporea
– <u>volume</u> del corpo

2.4 Una figura può valere mille parole



2.5 Una figura può valere mille bugie

Ecco le fotografie del mio viaggio in Cechia e rispettivamente in Chad che ho mostrato al mio amico americano (che peraltro non ha idea di dove siano la Cechia e il Chad, come usa colà). Immaginate che idee si è fatto.

Cechia

By Dezidor, in Wikimedia

Chad

By Kayhan ERTUGRUL, in Wikimedia

In effetti la prima è una catapecchia di zingari in Cechia, il secondo è il palazzo del parlamento del Chad.

Questo è uno dei modi in cui vengono condotte le manipolazioni mediatiche su certi argomenti "sensibili", trascegliendo immagini.

Molto più indicativo, proprio potente, è il confronto dei 2 valori di un parametro, fondamentale nelle Scienze Sociali e largamente correlato alla Medicina:

aspettativa di vita alla nascita in Cechia: 78 anni

aspettativa di vita alla nascita in Chad: 55 anni.

Questi 2 numeri sono medie fra milioni di persone, tutti gli abitanti dei 2 stati, invece le immagini sono del tutto fuorvianti fotografie di singole situazioni. (Che è proprio il modo con cui i media spesso mostrano le informazioni, corredandole di "esempi" fotografici... opportunamente scelti, in base agli interessi dei loro referenti).

Ma ancora più straordinariamente informativo di un numero, può essere un grafico, che è una particolare figura geometrica.

2.6 Primi concetti della Geometria Euclidea Elementare

I concetti primitivi di base della Geometria Euclidea sono questi:

il *punto* o spazio 0-dimensionale

la *retta(euclidea)* o spazio 1-dimensionale

il *piano(euclideo)* o spazio 2-dimensionale

la *spazio(euclideo)* o spazio 3-dimensionale

(L'ultimo è lo spazio euclideo propriamente detto ma anche gli altri vengono chiamati spazi euclidei, con la precisazione della dimensione).

Esistono spazi non euclidei, dei quali non ci occuperemo.

È ben possibile – la questione è ampiamente studiata in Fisica – che l'universo non si disponga affatto su uno spazio euclideo tridimensionale. Ma sulla scala umana, in cui avvengono tutte le cose della Farmacia, lo spazio euclideo tridimensionale modellizza benissimo il nostro mondo, in cui siamo immersi, viviamo e operiamo.
In esso possiamo modellizzare capsule e compresse di varie forme, la nostra farmacia e il suo magazzino, i capelli e i vasi sanguigni, e un'infinità di altre cose.

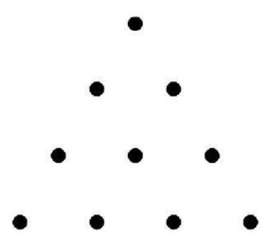
Si deve considerare noto che
– la retta è costituita da punti
– il piano è costituito (in vari modi) da rette
— e quindi da punti
– lo spazio è costituito (in vari modi) da piani
— e quindi da rette
— e quindi da punti.

Il punto è il concetto base delle varie Geometrie.

Il punto viene assiomatizzato “infinitamente piccolo" – si potrebbe dare una definizione più rigorosa – e la sua rappresentazione sul piano dovrebbe avere area 0 ma per visualizzarlo lo rappresenteremo più “cicciottello", con un pallino.

Definizione 1. Una certa quantità di punti (in seguito diremo *un insieme* di punti) di uno spazio euclideo si chiama *figura (geometrica, euclidea)*.

Per esempio la *tetraktys*, di 10 punti, su cui i seguaci di Pitagora facevano i giuramenti più solenni.

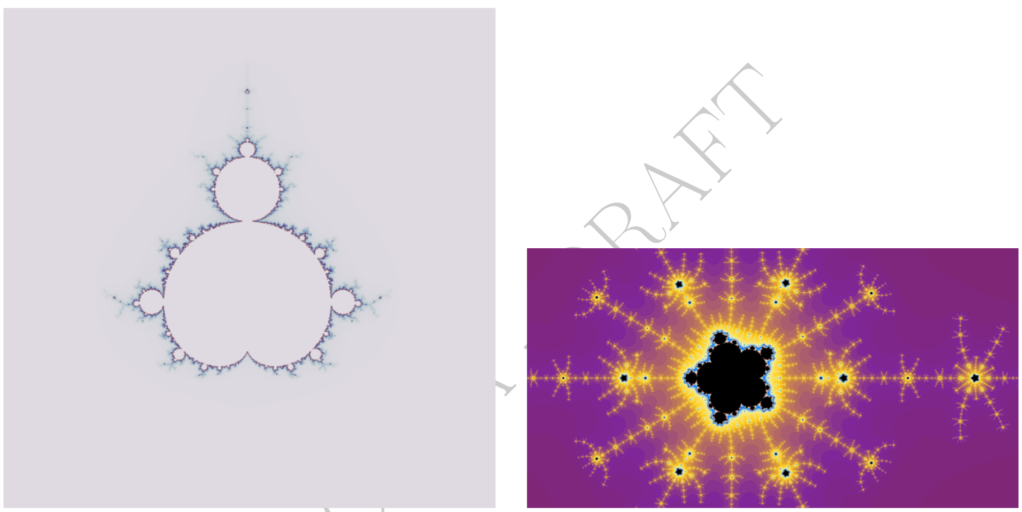


Tuttavia, molti Autori preferiscono quest’altra definizione:
Definizione 1 bis. Una certa quantità di punti (in seguito diremo *un insieme* di punti) di uno spazio euclideo che si dispone con continuità ovvero senza stacchi, si chiama *figura (geometrica, euclidea)*.
Con questa definizione modificata, la tetrattide non è una figura.

Le definizioni variano a seconda degli Autori e, in Farmacia, anche degli Enti regolarori.
Le definizioni in Farmacia sono una sorta di game changer. Per esempio se un prodotto verrà classificato vaccino piuttosto che profarmaco – e per i vaccini covid a mRna la questione è sottile – rientrerà in legislazioni e procedure di controllo diverse.
Oltre ad avere prospettive commerciali molto diverse, ovviamente.

Lo studio delle figure è l'oggetto delle Geometrie.

Tuttavia, noi ci occuperemo solo di figure molto "elementari" – seppure non si possa qua definire esattamente e precisamente la questione – non come quelle delle 2 figure qua sotto. Certamente non considereremo figure "frastagliatissime" come i frattali.
(La questione teorica è alquanto complessa: Teoria della misura).



A sinistra: il frattale di Mandelbrot. Immagine generata con l'assistenza di ChatGPT 4 di OpenAI, salvo successiva rotazione. A destra: Frattale. Public domain `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelbrot_6_Ph%C3%A1o_B%C3%B4ng.png`.

2.7 Altri concetti della Geometria Euclidea Elementare

Figure 1- e 2- e 3- dimensionali, e misure 1- e 2- e 3- dimensionali:
Curve – figure 1-dimensionali – fra cui le rette – hanno lunghezza.
Superfici – figure 2-dimensionali – fra cui i piani – hanno area.
Solidi – figure 3-dimensionali – fra cui lo spazio – hanno volume.

Considereremo *concetti primitivi* anche:
la *distanza* di 2 punti;
il *segmento*;
la *retta orientata*, dove i punti si *precedono* o *seguono* fra loro;
il fatto che un punto *origine* divide la *retta* in 2 *semirette*;
il fatto che una retta *origine* divide il piano in 2 *semipiani*;
il fatto che un piano *origine* divide lo spazio in 2 *semispazi*;
per semplicità di trattazione, anche la *curva* e la sua *lunghezza*;
per semplicità di trattazione, anche la *superficie* e la sua *area*.

2.8 Bordo ovvero contorno ovvero frontiera

Supponiamo noto il concetto – la cui definizione sarebbe complicata – di distanza di un punto da una figura.
(In uno spazio euclideo, a qualunque numero di dimensioni).

O.

Si potrebbe definire ma la definizione è complicata. Si immagini la distanza dalla Terra di un atomo in cielo. Oppure di quell'atomo da un'astronave, pur con la sua forma molto più variegata di una sfera. Oppure si ragioni sulla distanza del punto dalla lettera o soprastante.

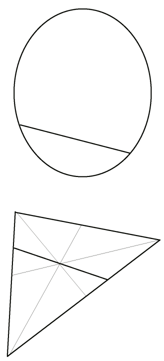
Definizione. Si chiama bordo o contorno o frontiera di una figura di uno spazio euclideo (a qualunque numero di dimensioni) l'insieme dei punti dello spazio che distano 0 dalla figura, e distano 0 dallo spazio privato della figura.

Nei casi più semplici è esattamente quello che nel linguaggio comune viene chiamato bordo della figura. Si pensi per esempio a un "cerchio pieno": la frontiera è il "cerchio vuoto".

Il bordo delle figure del piano euclideo considerate
in Geometria Elementare ha area 0.
Il bordo delle figure dello spazio euclideo considerate
in Geometria Elementare ha volume 0.

2.9 Corde e convessi

Definizione. Un segmento con estremi sul bordo di una figura si dice *corda* della figura.
Per altri Autori la corda è un'altra cosa: le discrepanze definizionali sono comuni in Geometria Euclidea. (Come in Medicina).



Il grandissimo matematico Godfrey Harold Hardy disse, sostanzialmente, a proposito della prima guerra mondiale, che ogni scienza viene apprezzata per quanti morti può fare in una guerra.

Definizione. Se ogni corda di una figura è contenuta nella figura, la figura si dice *convesso*. (Si pensi a un cerchio "pieno", e, come figura non convessa, una stella a 5 punte, anch'essa "piena").
Definizione. Una corda che congiunge un punto medio di un lato di un triangolo col vertice opposto si chiama mediana.
Teorema. Le 3 mediane di un triangolo si incontrano in 1 solo punto, detto baricentro. (Esso modellizza il baricentro della fisica).

La Tomografia Convessa, lontanamente collegata alla Tomografia Medica, si occupa delle lunghezze delle corde delle figure convesse.
Teorema[(2)]. Ogni triangolo è univocamente determinato dalle lunghezze delle sue corde passanti per il baricentro, a meno di una simmetria centrale con centro nel baricentro.

Si potrebbe obiettare che è un risultato inutile. Però:
– Ha bellezza.
– Ancora nessuno è riuscito a utilizzarlo per fare nuove armi, oppure epidemie, magari che colpiscano selettivamente gruppi etnici.

[2]Richard J. Gardner, Alessandro Soranzo, Aljoša Volčič: On the Determination of Star and Convex Bodies by Section Functions. Discret. Comput. Geom. 21(1): 69-85 (1999)

2.10 Note di Geometria Euclidea 1- 2- 3- dimensionale

La Geometria Euclidea Elementare Unidimensionale ovvero 1-dimensionale studia le figure contenute in una retta.
I tipi principali, fra infiniti, sono i seguenti.

∘ Il segmento ha lunghezza pari alla distanza degli estremi.
• Il punto ha lunghezza 0.
⋄ La retta e la semiretta hanno lunghezza $+\infty$.
⋆ figure terribilmente "frastagliate" potrebbero non avere una lunghezza e non verranno considerate nella Geometria Elementare (al livello di questo testo).

• Nel piano il punto, il segmento, la retta e tutte le altre figure (della Geometria Elementare) contenute in una retta hanno area 0.
• Nel piano ogni curva (della Geometria Elementare) ha area 0.
⋄ Il piano e il semipiano hanno area $+\infty$.
⋆ figure terribilmente "frastagliate" potrebbero non avere un'area e non verranno considerate nella Geometria Elementare (al livello di questo testo).

• Nello spazio ogni curva (della Geometria Elementare) ha volume 0.
• Nello spazio ogni superficie (della Geometria Elementare) ha volume 0.
• Nello spazio il punto, il segmento, la retta, il piano e tutte le figure contenute in un piano hanno volume 0.
⋄ Lo spazio e il semispazio hanno volume $+\infty$.
⋆ figure terribilmente "frastagliate" potrebbero non avere un volume e non verranno considerate nella Geometria Elementare (al livello di questo testo).

2.11 Decomposizione di una figura piana in più figure

Se nel piano euclideo una figura F si decompone, salvo al più la sovrapposizione sui bordi, in più figure $F_1, \ldots, F_n$ di aree $a_1, \ldots, a_n$, allora l'area di F è $a_1 + \ldots + a_n$. Si pensi alle aree dei 4 triangoli nella figura

Similmente avviene coi volumi nello spazio. Il paradosso di Banach-Tarski non riguarda le figure semplici a cui ci limitiamo ma proprio quelle super-frastagliatissime che abbiamo deciso di ignorare. ☺

Paradosso 1. Decomponendo la prima figura con 14 ballerine e ricomponendola si ottengono 15 ballerine.

Paradosso 2. LINK

2.12 Rette parallele e incidenti e sghembe, ed angoli

Due semirette diverse con stessa origine P dividono il piano in 2 *angoli* di *vertice* P. Se essi sono uguali si dicono *piatti*. Se uno è "minore" dell'altro quello minore si dice *convesso* e l'altro *concavo*. Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Rette non complanari non incidenti si dicono *sghembe*. Se l'intersezione ha esattamente 1 punto si dicono *incidenti*. Se l'intersezione coincide con le rette stesse, si tratta di 2 rette *coincidenti* (talvolta dette *parallele coincidenti*): in effetti è 1 sola retta considerata 2 volte. Due rette incidenti possono formare 4 angoli uguali che si dicono *retti*, e in quel caso le rette si dicono *ortogonali* o *perpendicolari*. Angoli "minori" di un angolo retto si chiamano *acuti* e angoli "maggiori" di un angolo retto e "minori" di un angolo piatto si dicono *ottusi*.
Tutte le predette cose tranne le rette sghembe, sono definite o nel piano euclideo, oppure in un piano dello spazio euclideo.

2.13 Geometria Elementare Bidimensionale

La Geometria Elementare Bidimensionale ovvero 2-dimensionale studia le figure contenute in un piano (euclideo).

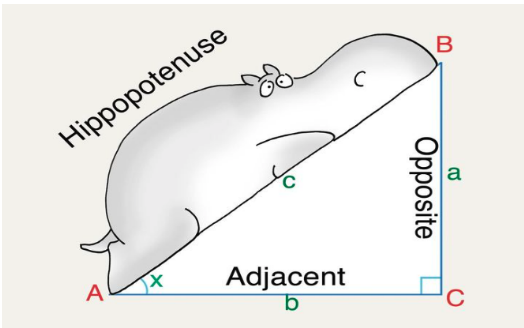
Alcune cose che supponiamo note dagli studi precedenti

poligono
lato del poligono, perimetro del poligono, area del poligono
triangolo: il poligono con 3 lati
lato e base e altezza del triangolo
triangolo rettangolo, isoscele ed equilatero
rettangolo, il poligono con 4 lati e 4 angoli retti
base e altezza del rettangolo
quadrato: il rettangolo con 4 lati uguali; lato del quadrato

- Il triangolo di base b e altezza h ha area $\frac{1}{2}\, b\, h$.
- Il rettangolo di lati a e b ha perimetro $2\,a + 2\,b$ e area $a \cdot b$.
- **Allora, il quadrato di lato a ha perimetro $4\,a$ e area a^2.**

2.14 Teorema di Pitagora

Un triangolo con un angolo retto si chiama triangolo rettangolo; si chiama ipotenusa il suo lato maggiore; cateti gli altri.



Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, vale

$$\boxed{i^2 = c_1^2 + c_2^2} \tag{1}$$

ESERCIZIO.
Calcolare la misura delle diagonali di un rettangolo di lati 36 27.
Soluzione parziale al LINK->

Ecco 2 conseguenze del Teorema di Pitagora:

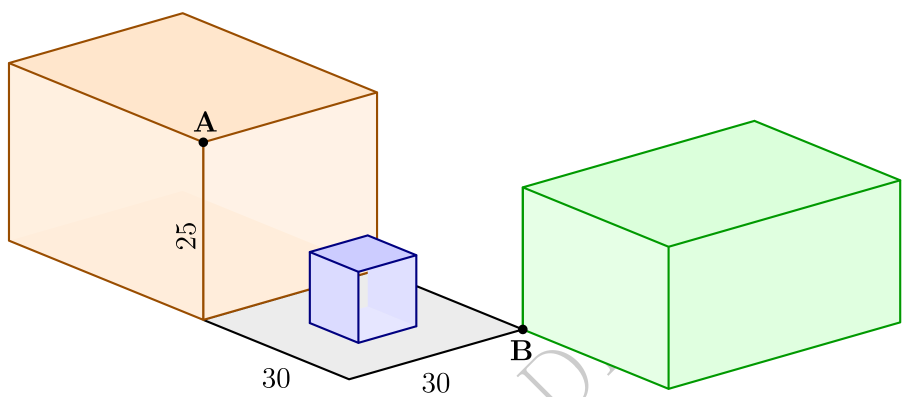
$$\boxed{\text{il triangolo equilatero di lato } a \text{ ha altezza } \sqrt{3}\,a}$$

$$\boxed{\text{la diagonale del quadrato di lato } a \text{ ha lunghezza } \sqrt{2}\,a} \tag{2}$$

* **Nota: i valori delle radici quadrate di 2 e di 3.** Buone approssimazioni di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ si possono ottenere con le calcolatrici aventi la funzione radice quadrata. Classiche approssimazioni che molti ricordano a memoria sono queste:

$$\sqrt{2} \approx 1.41 \qquad \sqrt{3} \approx 1.73$$

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ $\ast$ Vogliamo comprare una telecamera di sorveglianza da posizionare in A, su un condominio alto 25 metri, che manderà il segnale alla centralina in B (appena fuori della farmacia, e da là il segnale entrerà via cavo nella farmacia stessa). La trasmissione è garantita per distanze entro i 50 metri: ma la distanza di A da B è maggiore o minore? Si veda la figura con i 3 parallelepipedi e 1 quadrato.



SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Diciamo H il punto del quadrato sotto A (ovvero, più tecnicamente: H è la proiezione di A sul piano orizzontale su cui poggiano i 3 parallelepipedi).

Per il Teorema di Pitagora in uno qualunque dei 2 triangoli rettangoli con un vertice in B e uno in H, che sono metà del quadrato,

$$\overline{HB} = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800}\ \text{m}$$

(che potrebbe semplificarsi a $30\sqrt{2}$ m senza nessun vantaggio).

(Si potrebbe anche considerare che la diagonale di un quadrato di lato a è $a\sqrt{2}$ e allora adesso

$$\overline{HB} = 30\sqrt{2}\ \text{m}$$

ma senza nessun vantaggio).

Per il Teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo AHB

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{1800}\right)^2 + 25^2} =$$

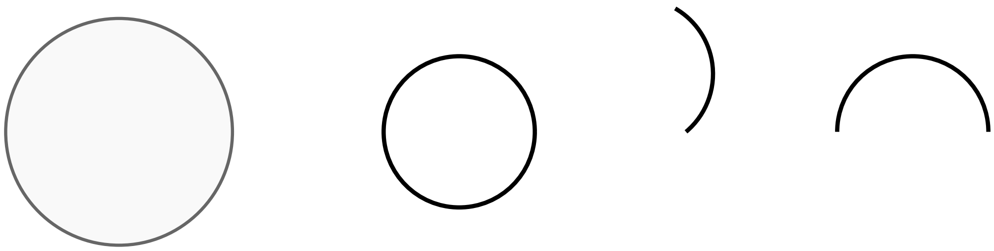
$$= \sqrt{1800 + 625} =$$
$$= \sqrt{2425} \approx$$
$$\approx 49.24 \text{ m}$$

e allora la distanza da A da B è, rispetto ai 50 metri, seppure di poco,

$$\boxed{\text{minore}}$$

2.15 Cerchio, circolo, circonferenza

In questo paragrafo semplicemente definiremo



cerchio, circolo, circonferenza,
centro, raggio, diametro,
arco di circolo, semicircolo, semicerchio,
notando grandi discrepanze definizionali.

In quest'ambito la nomenclatura è molto ambigua e varia fra i diversi Autori, usandosi in italiano
almeno 6 termini
per 3 sole cose,
e un'altra varietà di termini in inglese scientifico:
cerchio
circolo
circonferenza
disco
palla (2-dimensionale)
lunghezza della circonferenza.

In base alla nomenclatura che adottiamo in questo testo, possiamo immaginare le 3 cose così:

cerchio — affine a un disco di vinile — è una figura
circolo — affine a una fede nuziale — è una figura
circonferenza — lunghezza del circolo — in Matematica è un numero mentre in Fisica ha un'unità di misura ed è una grandezza fisica.

Definizioni. Dati un punto C e numero $r > 0$, l'insieme dei punti che hanno distanza r da C si chiama *circolo* (per altri Autori *circonferenza*) di *centro* C e *raggio* r. È una curva dotata di *lunghezza*, detta *circonferenza*.
Si noti che:
– il circolo appare “vuoto", e il centro non gli appartiene;
– il cerchio appare “pieno", e il centro gli appartiene:
in questa trattazione chiameremo *cerchio* l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq r$ da C, *centro del cerchio* (oltre che del circolo).
Ogni segmento nel cerchio lungo $2\,r$ si chiama *diametro*.
Teorema. Ogni diametro è una corda e contiene il centro.

Un diametro divide il cerchio in 2 *semicerchi* e il circolo in 2 *semicircoli*.

Ogni segmento che ha un estremo nel centro e uno sul circolo si chiama *raggio*.

Si noti che le parole *raggio* e *diametro* indicano sia dei segmenti che le loro lunghezze, spesso denotate con r e d.

Ogni corda di un cerchio crea in modo ovvio e ben noto 2 *archi di circolo*.

L'arco di circolo è una curva dotata di *lunghezza*.

2.16 Pi greco, lunghezza del circolo, area del cerchio

Definizione e Teorema.
In tutti i cerchi è sempre uguale il rapporto fra circonferenza e diametro, e il rapporto(3) si chiama *pi greco*:

$$\boxed{\pi := \frac{circonferenza}{diametro}} \tag{3}$$

Da quest'ultima indicando con d il diametro

$$circonferenza = \pi\, d$$

e da quest'ultima indicando con r il raggio (essendo $d = 2\,r$)

$$\boxed{circonferenza = 2\,\pi\, r} \tag{4}$$

La scrittura decimale di π ha infiniti decimali che non si ripetono periodicamente

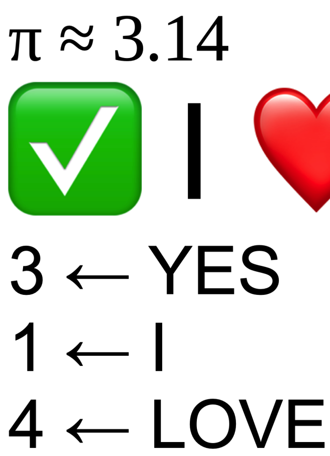
[3] Equivalentemente, dividendo per 2 il numeratore e il denominatore della (3), si ha che in tutti i cerchi è sempre uguale il rapporto fra semicirconferenza e raggio:

$$\pi := \frac{semicirconferenza}{raggio}$$

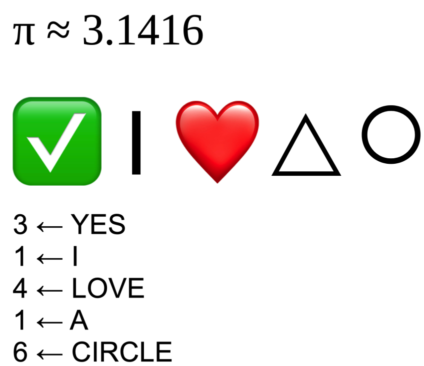
e vale l'approssimazione (con 3 cifre significative, o con 2 decimali esatti)

$$\boxed{\pi \approx 3.14} \qquad (5)$$

(e infinite altre approssimazioni con 3 o 4 o più cifre decimali esatte, approssimazioni che non ci proponiamo di imparare a memoria: ≈ 3.14 ci basta).



Mnemonico per 3.14:
contare le lettere delle 3 parole.



Mnemonico per 3.1416:
contare le lettere delle 5 parole.

Per un cerchio di raggio r

$$\boxed{\text{area} = \pi\, r^2} \tag{6}$$

(Da cui segue che un cerchio occupa circa il 78% di ogni suo quadrato circoscritto, e precisamente $\frac{100\,\pi}{4}$% ovvero $25\,\pi$ %).

2.17 Sull'orlo dell'abisso in compagnia di pi greco

Pi greco è ancora al centro di questioni scientifiche irrisolte.

Per esempio non si riesce ancora a dimostrare se tutte le cifre da 0 a 9 ricorrano infinite volte oppure no.

Moltissimi matematici hanno prodotto approssimazioni di π nel corso dei millenni.

Wikipedia italiana dà un'approssimazione di π con le prime 100 cifre decimali:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

(scritto con la virgola decimale, e spazietto ogni 5 cifre) e ci racconta altre cose interessanti:

Verso il XX sec. a.C. Babilonesi usavano l'approssimazione $\frac{25}{8}$, cioè 3.125. Archimede nel III sec. a.C. dà l'approssimazione $\frac{211\,875}{67\,441}$, cioè 3.14163...

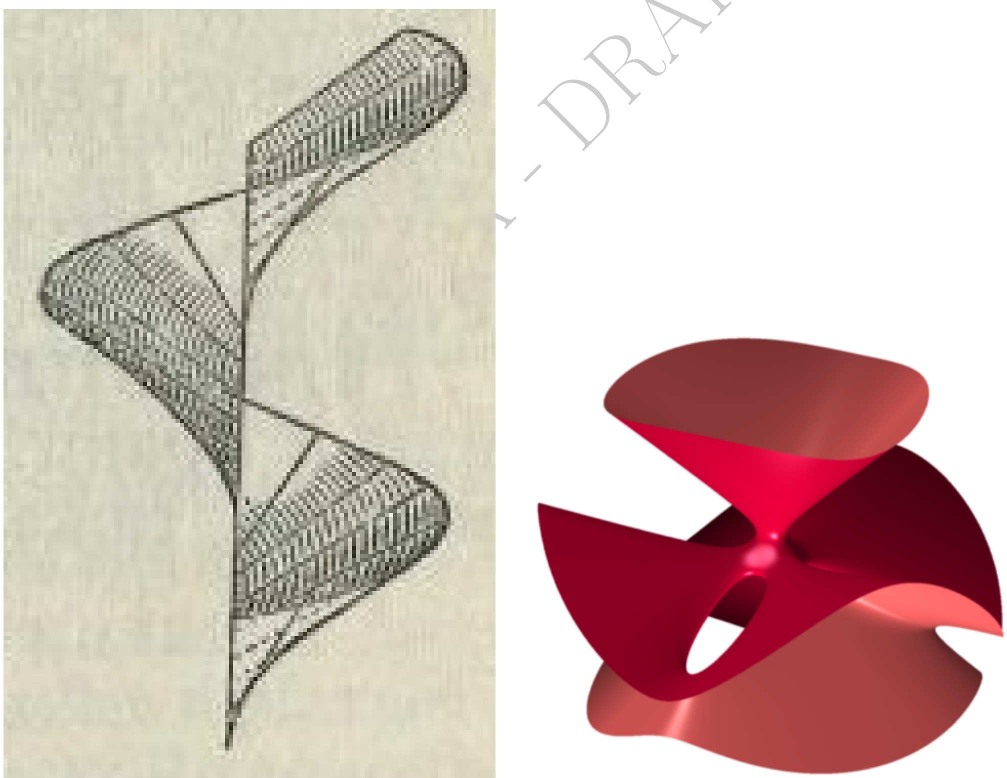
> Il matematico tedesco Ludolph van Ceulen (1600 circa) calcolò i primi 35 decimali. Era così fiero del suo risultato che lo fece scrivere sulla sua lapide. (Wikipedia, l'enciclopedia libera)

Nel 2020 sono state calcolate 50 000 miliardi di cifre decimali.

2.18 Geometria Elementare Tridimensionale

La Geometria Elementare Tridimensionale ovvero 3-dimensionale studia le figure contenute nello spazio (euclideo).

Ci sono fenomeni ancora più controintuitivi che in 2 dimensioni. Per esempio la superficie di Clebsh qua sotto a destra (parzialmente, ovvio) rappresentata contiene 27 rette, nostante la sua apparenza alquanto ondulata. È una superficie del tipo di quelle (superfici algebriche) indagate da Ugo Morin a cui è dedicata un'aula a Trieste (dove nacque nel 1901) nell'Università per la quale questo libro di Matematica viene scritto.



A sinistra: Elicoide. Public domain (?) image in https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%D0%91%D0%A1%D0%AD1._%D0%93%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B8%D0%B4.jpg. A destra: Superficie di Clebsch. By Fly by Night in https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Clebsch_Cubic.png.

◦ **Il parallelepipedo di lati** a, b, c **ha volume** $a\,b\,c$**:**

$$\boxed{V_{\text{parallelepipedo}} = a \cdot b \cdot c} \tag{7}$$

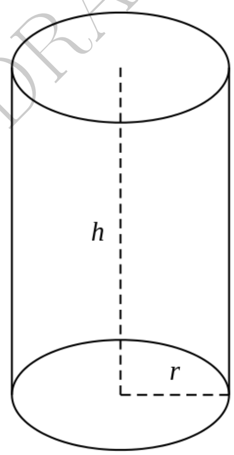
e allora il cubo di lato x ha volume x^3.

◦ **La sfera di raggio** r **ha volume**

$$\boxed{V_{\text{sfera}} = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^3} \tag{8}$$

come da poesia in figura; risultato trovato da Archimede.

Poesia Futurista Sferica
(Pseudomarinetti)



Cilindro

◦ **Il cilindro ha volume** $area\_di\_base \cdot altezza$ **ovvero**

$$\boxed{V_{\text{cilindro}} = \pi\, r^2\, h} \tag{9}$$

e area laterale $2\pi\, r\, h$.

Per *cilindro*, in geometria elementare si intende quello del linguaggio comune, come nella figura; più tecnicamente potrebbe essere chiamato *cilindro circolare retto troncato*, e potrebbero considerarsi anche cilindri non retti o non circolari o non troncati.

2.19 Alcune cose supposte note dagli studi precedenti

Una figura si dice *limitata* se esiste un cerchio che la contiene (per esempio i segmenti), altrimenti *illimitata* (per esempio le rette).
L'unione di 2 segmenti AB e BC (da altri denotati $[AB]$ e $[BC]$) non *allineati*, con un estremo B in comune si chiama *linea spezzata* di 2 *lati* AB e BC e *vertice* B, e in modo analogo è definita quella di più *lati*. Non facciamo i dettagli, come pure per le seguenti intuitive denominazioni:

linea spezzata *chiusa*, o altrimenti *aperta*;
linea spezzata *intrecciata*, o altrimenti non intrecciata;
lati *consecutivi*;
lunghezza della linea spezzata.

Supponiamo noto il fatto (non banale da dimostrare) che una linea spezzata chiusa non intrecciata divide il piano in 2 parti. Quella limitata si chiama *poligono (semplice)* (o *non intrecciato*), coi lati e i vertici della linea spezzata, e *perimetro* la sua lunghezza.
Il poligono si dice

equilatero se ha i lati uguali
equiangolo se ha gli angoli uguali
regolare se è equilatero ed equiangolo.

⋄ I poligoni con 3 lati si chiamano *triangoli*.

⋄ I poligoni con 4 lati si chiamano *quadrilateri*.

Fra i quadrilateri ci sono i *parallelogrammi*, che hanno i lati a 2 a 2 paralleli, e fra essi ci sono

* il *rombo*, che è equilatero,
* il *rettangolo*, che è equiangolo (angoli tutti retti)
* il *quadrato*, che è equilatero equiangolo.

⋄ I poligoni con 5 lati si chiamano *pentagoni*.
⋄ I poligoni con 6 lati si chiamano *esagoni*.

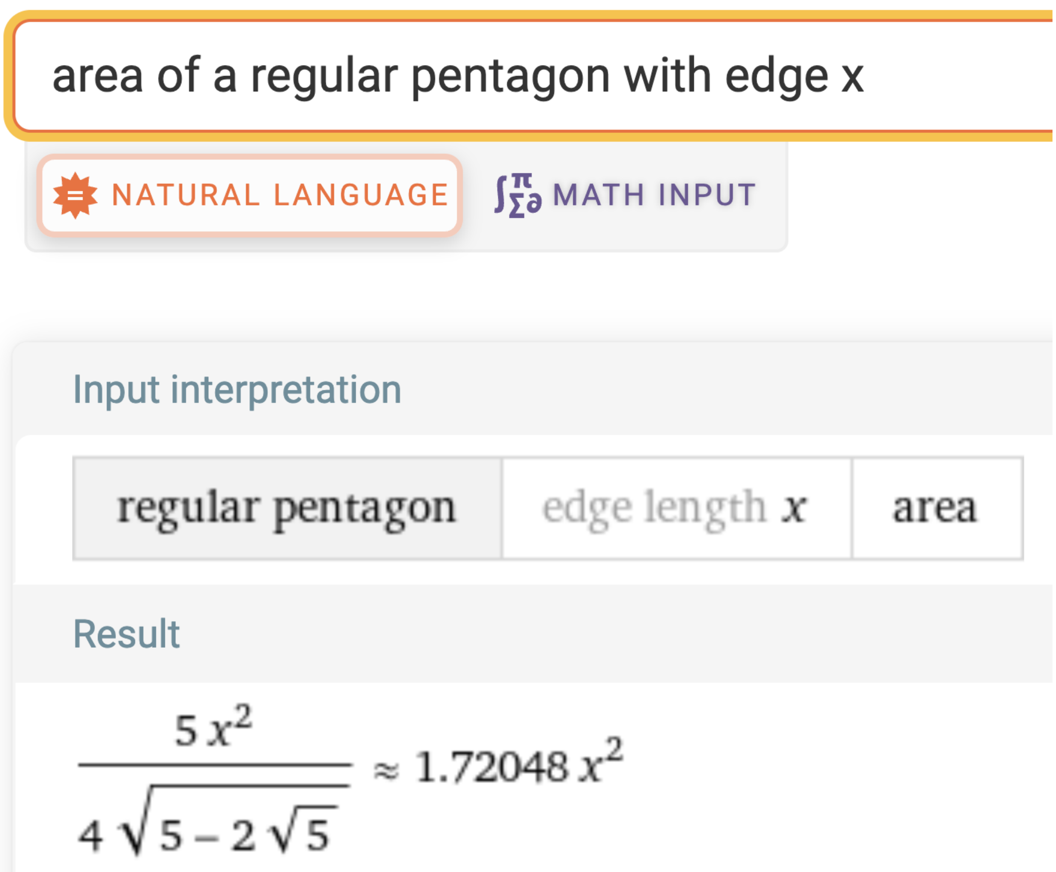
2.20 Con WolframAlpha

Mai sufficientemente bene sarà detto di WolframAlpha, la più potente intelligenza artificiale matematica attualmente disponibile gratuitamente online.

Esempio. Scriviamo

```
area of a regular pentagon with edge x
```

e ci risponde



2.21 Le simmetrie, la chiralità e i farmaci

Ben note al lettore sono le simmetrie, rispetto a un punto, rispetto a una retta, rispetto a un piano. L'ultimo caso corrisponde allo specchio. Leggiamo su Science([4])

> All of life exists on just one side of a mirror. To put it more technically, the biomolecules that comprise living things – DNA, RNA, and proteins – are all "chiral." Their building blocks have two possible mirror-image shapes, but in every case, life chooses just one. At least so far.
>
> Today in Science, researchers report they've made strides toward exploring the other side of the mirror. They re-engineered a workhorse enzyme that synthesizes RNA so it makes the mirror-image form. They then used that enzyme to construct all the RNAs needed to make a ribosome, the cellular machine responsible for constructing proteins. Other components still need to be added, but once completed, a mirror-image ribosome might be able to churn out proteins that could serve as novel drugs and diagnostics and cant readily be broken down in the body.

Tragica vicenda della Farmacia, è quella del/la Talidomide, correlata alla chiralità delle molecole. Leggiamo([5]) dal CNR, consiglio Nazionale delle Ricerche, il principale ente pubblico di ricerca italiano:

> La talidomide, farmaco ampiamente utilizzato in passato per curare l'influenza, come sedativo e per alleviare i sintomi della nausea da gravidanza, viene spesso menzionato come caso studio per introdurre i concetti di isomeria e chiralità delle molecole. Considerato inizialmente privo di tossicità, in seguito alla sua ampia diffusione

---

[4] 'Mirror-image' protein factories could one day make durable drugs the body can't break down (27 OCT 2022)

[5] `https://almanacco.cnr.it/articolo/11422/simmetria-e-asimmetria-delle-molecole`, letto il 7 settembre 2024

> provocò il verificarsi di gravi effetti collaterali, tra questi la nascita di bambini focomelici o con gravissime malformazioni agli arti, figli delle donne che avevano assunto il farmaco durante la gravidanza. La molecola, infatti, esiste in due forme aventi formula identica e con gli atomi legati fra loro nello stesso ordine, l'unica differenza è l'arrangiamento degli atomi nello spazio, per cui una forma è l'immagine speculare dell'altra, ma le due forme non sono sovrapponibili, analogamente a quanto osserviamo confrontando la mano destra con la mano sinistra.
>
> Una forma della talidomide è quella curativa, mentre nell'altra la molecola è tossica teratogena. Questa asimmetria viene definita come la chiralità di una molecola: una molecola è chirale quando è presente in due forme, gli enantiomeri, ciascuno immagine speculare dell'altro, ma non sovrapponibili. Le molecole chirali spesso sono presenti come miscela dei due enantiomeri, dette miscele raceme. Nel caso specifico della talidomide, isolarne la forma "innocua" dal racemo è risultato inefficace, perché il nostro organismo è in grado di convertire un enantiomero nell'altro.

Meno tragicamente, leggiamo sul sito dell'UTIFAR, Unione Tecnica Italiana Farmacisti:

> L'ibuprofene (...) viene attualmente commercializzato in forma racemica, ma i dati di letteratura suggeriscono come soltanto l'enantiomero S sia responsabile dell'azione farmacologica, mentre l'enantiomero R appare privo di tale caratteristica e si accumula nei grassi sotto forma di estere del glicerolo. Alla luce di ciò, risulta importante sviluppare strategie sintetiche che permettano di ottenere solo l'enantiomero S.

2.22 Perchè si studia Geometria? Da millenni?

Alcune cose della geometria sono direttamente utili in Farmacia, talvolta attraverso la Chimica, la Fisica, la Fisiologia.

Ma il motivo per cui da millenni nelle società civilizzate tutti studiano la Geometria Euclidea, anche i prìncipi destinati a diventare re, è molto più profondo.

La Geometria Euclidea è la Scienza razionale per eccellenza, con un valore didattico immenso, sperabilmente formativo per la persona. Segnaliamo alcuni aspetti, tutti poi ricorrenti nella Farmacia:
– la rigorosa precisione delle definizioni
– la ferrea logica delle argomentazioni
– i risultati controintuitivi
– le illusioni percettive
– capire i limiti dell'intelligenza.

Nota sulle definizioni. Le Aziende farmaceutiche devono per legge attenersi rigorosamente a un'infinità di definizioni.
Ma anche per altri motivi ci tengono molto ai nomi e alle questioni definizionali. Si pensi a come una nota azienda ha capitalizzato l'enorme fiducia acquisita presso i Consumatori col Fluimucil, vendendo adesso il Fluimucil Influenza e Raffreddore.
Che però non contiene il principio attivo del Fuimucil.
($ia onore al merito).

Nota sulla ferrea logica. La rigorosa precisione e la ferrea logica, col loro richiedere di "rompersi la testa" su ogni rigo di testo, sono l'opposto della moderna cultura dei 140 caratteri dei tweet, degli slogan, dei *non sequitur* cioè gli errori di ragionamento, che hanno dato immensa prova di forza e pervasività anche durante la pandemia – e adesso (2022-2024) con la guerra. Slogan che sono molto più connaturali all'essere umano della sottil logica – in qualche modo "giustamente": *i lupi sono cattivi* avrà salvato molti bambini in passato – e sempre hanno permesso e adesso permettono facilmente di trascinare le masse

alla guerra, con gli slogan invece della razionalità.

Complementi

2.23 Complementi – Congruenza

Se per 2 figure F ed F' esiste una funzione biiettiva $f : F \to F'$ che conserva le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti

$$\overline{f(P)\, f(Q)} = \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *congruenti* e si possono immaginare come *sovrapponibili*; ma si faccia attenzione che l'azione della sovrapposizione può necessitare di passare momentaneamente nello *spazio* in cui è contenuto il piano – può in effetti non bastare un movimento di strisciamento sul piano – come per i grafemi d e b. Tutte le rette sono congruenti, e anche le semirette e i semipiani.
Se F ed F' sono il piano euclideo stesso, f si chiama *isometria*.

2.24 Complementi – Similitudine

Se per 2 figure F ed F' esistono un numero $\alpha > 0$ e una funzione biiettiva $g : F \to F'$ che moltiplica per α le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti ovvero precisamente

$$\overline{f(P)\, f(Q)} = \alpha \cdot \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *simili*. In pratica si tratta di ingrandimenti o rimpicciolimenti.
Si dimostra che se un triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un altro, essi sono simili. Allora dette a, b, c le misure dei lati del primo, e a', b', c' quelle del secondo, vale la (doppia) proporzione

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad \textit{ossia} \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,.$$

2.25 Complementi – Quanti circoli esistono?

Tutti i segmenti sono simili (in senso geometrico: in pratica ogni segmento è ingrandimento/rimpicciolimento di ogni altro), e così avviene anche per le rette, i circoli, i cerchi, i quadrati e i triangoli equilateri, e perfino – cosa sorprendente e poco nota anche fra i matematici – tutte le parabole.

2.26 Complementi – Teoremi di Euclide.

Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, h quella della distanza dell'ipotenusa dal vertice *opposto* (cioè h è la lunghezza dell'*altezza relativa all'ipotenusa*), e p_1 e p_2 le lunghezze delle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (nell'ordine), valgono:

$$c_1^2 = h \cdot p_1, \quad c_2^2 = h \cdot p_2 \qquad \textit{Primo Teorema di Euclide}$$

$$p_1 : h = h : p_2 \qquad \textit{Secondo Teorema di Euclide.}$$

2.27 Complementi – Note sugli enti geometrici

La distanza è un numero reale non negativo.
Lunghezza, area e volume sono $+\infty$ o numeri reali non negativi.
Le altre cose cose finora considerate invece sono figure e quindi insiemi di punti, tranne l'orientazione della retta e della semiretta: l'orientazione è un ente matematico diverso dai numeri, da $+\infty$ e dalle figure; è più sottile ma possiamo ritenerlo intuitivo. (Ancora più sottile è l'orientazione del piano, che vedremo, e ancora più sottile l'orientazione dello spazio).

2.28 Complementi – Definizioni precise in Farmacia

Le definizioni, parola per parola, hanno implicazioni legali – talvolta di smisurata portata, anche economica, perfino mondiale.

Leggiamo su Facta:

> La definizione (...) al momento in cui scriviamo, recita «Vaccino: Un preparato che è usato per stimolare la risposta immunitaria del corpo contro delle malattie». La stessa pagina il 21 agosto 2021, preservata da Internet Archive, invece definiva il vaccino «Un prodotto che stimola il sistema immunitario di una persona per produrre l'immunità da una specifica malattia, proteggendo la persona da quella malattia».

Questo cambiamento di definizione ha permesso di far approvare come vaccini prodotti che prima non sarebbero rientrati nella definizione (i vaccini non possono, come dice Facta, essere "efficaci al 100 per cento"), anche capitalizzando la fiducia guadagnata dal Prodotto presso il Consumatore nei secoli precedenti, ascritta al nome "vaccino".

Non si facevano cento miliardi di dollari inoculando una cosa chiamata per esempio *profarmaco*; con *vaccino* sì.

Sconcertante per uno Statistico è l'incredibile varietà di definizioni usate negli articoli scientifici per "vaccinato", quando pure si degnano di riportare quella che hanno usato per la ricerca. Leggiamo per esempio in un articolo[6] scientifico:

> Partially vaccinated people who received the vaccine during the follow-up period but did not become protected during the study period (did not receive the booster or died before the 7th day after complete vaccination) were excluded from the investigation.

[6] Pálinkás A, Sándor J. Effectiveness of COVID-19 Vaccination in Preventing All-Cause Mortality among Adults during the Third Wave of the Epidemic in Hungary: Nationwide Retrospective Cohort Study. Vaccines (Basel). 2022 Jun 24;10(7):1009. doi: 10.3390/vaccines10071009. PMID: 35891173; PMCID: PMC9319484.

Altro esempio: una famosa famosa Azienda produttrice, nei trial clinici ha definito come reazione avversa superata l'aborto spontaneo, ottenendo quindi un minor peso complessivo delle reazioni avverse, aumentando le possibilità che le venisse concessa l'autorizzazione per la messa in commercio del suo vaccino.

2.29 ESERCIZI SULLA LEZIONE 2

2.29.1 Esercizio risolto a – Volume di una goccia

$_{\mu}2021$ * Se un millilitro ovvero centimetro cubo d'acqua corrisponde a 20 gocce, e supponendo sferica una goccia, trovarne il diametro.
L'unità d misura, cm, deve essere scritta esplicitamente nel risultato.
(In Farmacia e Medicina si ritiene in generale che 1 millilitro d'acqua corrisponda a 20 gocce. **Non c'è alcuna garanzia che ciò sia un fatto sempre vero, che siano sempre esattamente 20, ma di questo non ci occupiamo.** Con sostanze diverse dall'acqua distillata il numero 20 può cambiare molto ma non ce ne occupiamo. E naturalmente nel campo gravitazionale la forma non sarà esattamente sferica ma non ce ne occupiamo).

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

Il volume di 1 goccia è $\frac{1}{20}$ di centimetro cubo, cioè 0,05 cm^3 ovvero ml, e ricordando il volume della sfera abbiamo l'equazione nell'incognito raggio r

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{20} \qquad \Big/ \cdot \frac{3}{4\pi}$$

dove r è in cm, e $\frac{1}{20} = 0{,}05$ in cm^3, ma facciamo i calcoli senza unità di misura

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{20} \qquad \Big/ \ \sqrt[3]{}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{80\pi}}$$

e moltiplicando per 2 per avere il diametro invece del raggio

$$\boxed{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{80\pi}} \text{ cm}}$$

e l'esercizio sarebbe finito.

Tuttavia possiamo esprimere meglio la soluzione trovata, facendo "entrare" il 2 sotto la radice cubica, con l'uguaglianza $2 = \sqrt[3]{8}$, e 8 si semplifica con 80,

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{3}{10\pi}} \text{ cm}}$$

Nota. Numericamente sono ≈ 0.46 cm, circa mezzo centimetro di diametro.

2.29.2 Esercizio risolto b – Volume di una capsula

$_{\mu 2019 modif}$ ≈ Si consideri una capsula (*vulgo*: pillola) ipotetica ma comunque di apparenza alquanto normale – non viene qua seguito alcuno standard legale o industriale – il cui volume interno abbia la forma di un cilindro di diametro 0,4 cm e lunghezza 1,2 cm completato con due semisfere.
Calcolatone il volume, lo si riduca di $^1\!/_4$.
Si ricordi che cilindri e prismi hanno volume *area di base* × *altezza* qualunque forma abbia la base.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale (come già nel quesito).

Prima di tutto osserviamo che nel testo viene dapprima chiamata *lunghezza* del cilindro quella che di solito in geometria elementare, e in particolare nella formula, viene chiamata *altezza* del cilindro: abituiamoci a tale ambiguità.
Ricordiamo la formule dell'area del cerchio e del volume della sfera in funzione dei raggi:

$$\pi r^2 \qquad \frac{4}{3}\pi r^3$$

La base del cilindro è un cerchio di raggio pari alla metà del diametro

$$r = 0{,}2\,\mathrm{cm}$$

e quello è anche il raggio delle semisfere.
Avendosi 2 semisfere, calcoleremo il volume di 1 sfera e lo sommeremo al volume del cilindro, la cui area di base è πr^2, facendo i calcoli dapprima senza unità di misura:

$$V_{sfera\,unione\,delle\,2\,semisfere} + V_{cilindro} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h =$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3 + 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}2 \approx 0{,}184213$$

che ora riduciamo *di* $^1\!/_4$, come richiesto, con la formula
$x \mapsto x - \frac{1}{4}x$ (da tenere ben distinta dalla $x \mapsto \frac{1}{4}x$ corrispondente a "ridurre *a* $^1\!/_4$")

$$\approx 0{,}184213 - \frac{0{,}184213}{4} \approx 0{,}13816$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{0{,}138\ \mathrm{cm}^3}$$

(Sono 138 mm^3, approssimativamente $\frac{1}{7}$ di centimetro cubo ovvero millilitro).

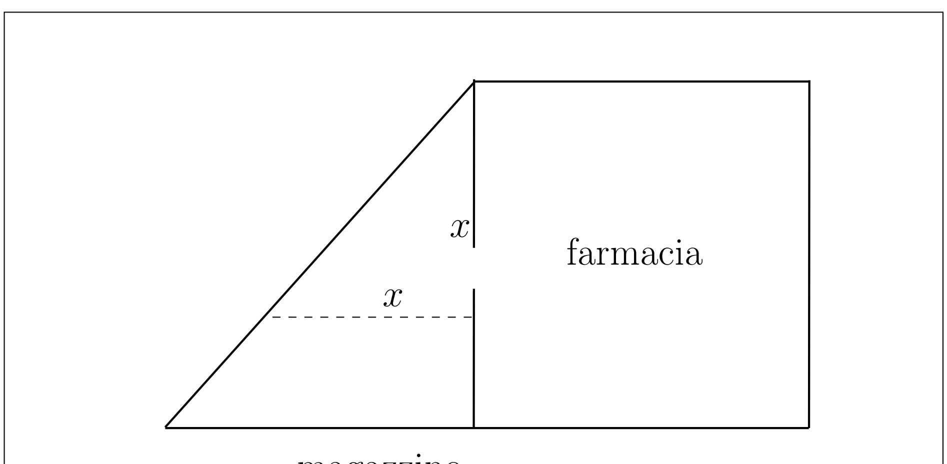
NOTA. Le scritture frazionarie come $^1\!/_4$ e $\frac{1}{7}$ vengono escluse dalla *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano:

> evitare l'uso delle frazioni (ad esempio, $^1\!/_2$ compressa ovvero "metà compressa" puè essere frainteso con 1 o 2 compresse) e sostituire, ove possibile, il farmaco con altra forma farmaceutica avente il dosaggio necessario

ma esse continueranno a trovarsi in un'infinità di testi, anche di Farmacia.

2.29.3 Esercizio risolto c – Dimezzare il magazzino

$_{\mu 2025}$ $\approx$ Supponiamo che la Protezione Civile ci imponga di svuotare metà del magazzino della nostra farmacia per urgenti necessità relativamente a una epidemia o terremoto. Il nostro magazzino ha la forma (cioè, in pianta) della metà di un quadrato che si ottiene suddividendolo con una diagonale. (Si tratta di un triangolo rettangolo isoscele). Il lato del quadrato misura 1 (per esempio 1 dm, decametro, 10 metri, ma non ci occuperemo delle unità di misura). Ora noi vogliamo suddividere (per esempio con un nastro adesivo sul pavimento) quel triangolo in 2 parti di ugual area; per esempio con una linea parallela a un cateto, ottenendo un trapezio e un triangolo. Trovare l'altezza x del triangolo. (Ovviamente il nuovo triangolo ha non solo altezza x ma anche, per considerazioni di geometria elementare, base x).



SVOLGIMENTO

L'area del quadrato di lato 1 è 1^2 cioè 1, e allora il magazzino ha area

$$A_{triangolo\,grande} = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Il triangolo nuovo ha sia altezza che base lunghe x e allora l'area è

$$A_{triangolo\,piccolo} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \qquad (**)$$

Il valore in $(**)$ dev'essere metà del valore in $(*)$:

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad \Big/ \cdot 2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \Big/ \sqrt{\ } \quad (x > 0)$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

e con la calcolatrice

$$\boxed{\approx 0.707}$$

(Per un lato iniziale di misura ipotetica 1 decametro ovvero 10 metri, si tratta di 7 metri e 7 centimetri).

2.29.4 Problema tanto carino quanto difficile ☺☺☺

Problema di Apollonio. Trovare un cerchio che tocchi (cioè, *tangente* ai *bordi*) simultaneamente tre cerchi dati.

☺ ☺ ☺

Ce ne possono essere parecchi ma è molto difficile trovarne i centri e i raggi.

2.29.5 Problema insolubile

Con soli riga e compasso trovare il lato di un cubo che abbia volume doppio di un cubo a assegnato.
(È ben nota la semplice costruzione con riga e compasso di un quadrato avente area doppia di un quadrato assegnato, ma il corrispondente problema col volume dei cubi è insolubile).

2.29.6 Aneddoto – Perché studiare Geometria?

> Si racconta che, nell'antica Alessandria, durante una lezione di geometria, un giovane studente si avvicinò a Euclide, uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, e gli chiese: "Qual è il beneficio pratico di studiare la geometria?" Il ragazzo, probabilmente stanco di lavorare su prove e postulati senza vederne un'applicazione immediata, sperava in una risposta che giustificasse il tempo e l'energia spesi nello studio.
> Euclide, senza rispondere direttamente, chiamò un servo e disse: "Dagli tre oboli, perché vuole trarre profitto da ciò che sta imparando." (Un obolo era una piccola moneta dell'antica Grecia.)

(ChatGpt, 2024)